Le terme « Problème des moments » apparait à la fin du $XIX^{ième}$ siècle dans deux articles de T. Stieltjes (1894 et 1895) : « We shall give the name moment problem to the following problem : it is required to find the distribution of positive mass on the interval $[0, \infty)$, given the moments of order k ($k = 0, 1, 2, \cdots$) of distribution ». Quelques années plus tard, H. Hamburger résolut le problème qui porte maintenant son nom : trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure positive telle que l'on ait la représentation intégrale

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k d\sigma(u), \quad k \geq 0,$$

où $(s_k)_k$ est une suite de réels (ou de complexes) donnée. A cette époque, de nombreuses avancées sur le problème des moments furent obtenues par différentes méthodes grâce notemment à P. Nevanlinna, M. Riesz, E. Hellinger et T. Carleman.

A ce problème général se sont gréffées des questions annexes, en imposant des contraintes supplémentaires sur le support de la mesure positive σ (l'un des problèmes les plus célébres est peut-être celui de Hausdorff où l'on demande que le support de la mesure soit inclus dans le compact [0,1]).

Autant le problème sur $\mathbb{R}$ est bien connu (tout au moins le problème de l'existence, pas forcément celui de l'unicité de la mesure de représentation), autant le passage en plusieurs variables pose de nombreuses interrogations. Le problème majeur est que tout polynôme positif sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) ne peut pas s'écrire comme la somme de carrés de polynômes (fait connu dès la fin du $XIX^{ième}$ siècle et prouvé par Hilbert). Il faut quand même attendre la seconde moitié du $XX^{ième}$ siècle pour avoir des exemples concrets de ce phénomène (voir [BCR], [Rob], etc.).

Le but de ce travail est d'apporter quelques réponses au problème des moments multi-dimensionnel ainsi qu'à quelques problèmes connexes comme la représentation de polynômes positifs sur des fermés ou la sous-normalité (jointe) pour des familles d'opérateurs. Ces trois problèmes seront traités, dans cet ordre, dans les chapitres I, II et III.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au problème des moments sur un compact, c'est à dire que l'on imposera que le support de la mesure soit inclus dans un compact choisi K. Ce problème est souvent appelé K-problème des moments. Le premier à résoudre cette question est G. Cassier pour des compacts d'intérieur non-vide : l'idée est basée sur l'introduction de polynômes de la forme $p^\alpha(1-p)^\beta$ comme dans la résolution du problème de Hausdorff (voir [Cas2]). En 1998 dans [Vas2], F.-H. Vasilescu donne une condition plus explicite pour le cas des compacts semi-algébriques :

Soit K un compact arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une suite de polynômes $(P_i)_{i\geq 0}$ telle que :

$$K = \bigcap_{i\geq 0} P_i^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

$$\mathcal{T} = \left\{ \prod_{i\in I, I \text{ fini}} \hat{P}_i^{\alpha_i}(t)[1-\hat{P}_i(t)]^{\beta_i}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0 \right\} \subset \mathcal{P}_+(K). \tag{1.1.7}$$

1.1.7 Théorème : *Soit $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ ($\gamma_0 > 0$) une multi-suite de nombres réels et soit K un compact arbitraire. Alors γ est une multi-suite de moments pour une mesure positive*

μ, unique et à support dans K, si et seulement si la forme linéaire associée L_γ est positive sur l'ensemble $\mathcal{T}$.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous immergeons l'algèbre des polynômes dans des algèbres de fractions rationnelles pour donner des réponses aux problèmes des moments non bornés (comme celui de Stieltjes et de Hamburger, dans le cas multi-dimensionnel) en utilisant des méthodes parues en 1999 dans un article de M. Putinar et F.-H. Vasilescu ([Pu-Vas2]), méthodes basées sur la construction d'une famille normale d'opérateurs. L'idée de plonger l'algèbre des polynômes dans une algèbre plus grande est récente. Elle apparaît ainsi dans une note au C.R.A.S. en 1991 (voir [Gi-Se]). Le fait de généraliser les résultats de [Pu-Vas2] nous permettra de donner, dans la suite, des résultats de sous-normalité pour des multi-opérateurs non nécessairement bornés. La méthode est basée sur une construction classique de I.M. Gelfand et M.A. Naimark. Si nous notons par $\mathcal{S}^2$ le cône positif engendré par les carrés des polynômes, nous obtenons le résultat suivant (voir aussi le théorème 2.5 de [Pu-Vas2], qui se retrouve avec $I_1 = [1, n] \cap \mathbb{Z}_+$) :

1.2.5 Théorème : *Soit $(p_1, \cdots, p_m)$ un m-uplet de polynômes de $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}_n[X]$, sans aucun zéro dans $\mathbb{R}^n$, de la forme :*

$$p_j(t) = 1 + \sum_{k \in I_j} t_k^2 + \sum_{l \in L_j} r_{j,l}(t)^2,$$

avec $I_1 \cup \cdots \cup I_m = [1, n] \cap \mathbb{Z}_+$. Soit ϕ une forme linéaire positive semi-définie sur $\mathcal{R}_\theta$ telle que les formes $\{\phi(r_{j,l}*)\}_{(j,l)\in\{1,\cdots,m\}\times L_j}$ le soient également. Alors ϕ admet une unique mesure de représentation μ, dont le support est inclus dans $\cap_{(j,l)\in\{1,\cdots,m\}\times L_j} r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$. La réciproque est également vraie.

1.2.10 Théorème : *Soit $(p_1, \cdots, p_m)$ un m-uplet de polynômes de $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}_n[X]$ sans aucun zéro dans $\mathbb{R}^n$ de la forme :*

$$p_j(t) = 1 + \sum_{k \in I_j} t_k^2 + \sum_{l \in L_j} r_{j,l}(t)^2,$$

où les ensembles $(I_j)_{j=1,\cdots,m}$ vérifient la condition (1.2.7) et où les $(r_{j,l})_{j,l}$ sont des polynômes.

Soit ϕ une forme hermitienne positive semi-définie sur $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$ qui est unitale et $\mathcal{R}_\theta$-symétrique. Alors, ϕ est une forme de moments ayant une unique mesure opératorielle de représentation.

Si, de plus, les formes sequilinéaires $\{\phi(r_{j,l}*, *)\}_{(j,l)\in C}$ ($C \subset \{(j,l) \,/\, l \in L_j,\, j = 1, \cdots, m\}$) vérifient $\phi(r_{j,l}X, X) \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$, la mesure de représentation a son support inclus dans $\cap_{(j,l)\in C}\, r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

Dans le deuxième chapitre de ce travail, nous essayerons de donner des représentations de polynômes positifs sur des fermés non nécessairement bornés. Comme dans le chapitre précédent, nous nous intéresserons, dans un premier temps, au cas des compacts arbitraires. Nous commençons par généraliser des résultats de [Cas2] et [Vas2] au cas des compacts arbitraires grâce à une suite dénombrable de polynômes comme dans le cas du théorème 1.1.7. Puis, nous cherchons une représentation en termes de carrés de polynômes comme dans un article de M. Putinar paru en 1993 (voir [Pu2]), où le cas des compacts semi-algébriques a été traité :

2.1.1 Proposition : *Tout polynôme strictement positif sur K est dans le cône positif engendré par les éléments de $\mathcal{T}$.*

2.1.5 Théorème : *Tout polynôme strictement positif sur K est dans le cône positif $\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2$.*

Enfin dans la section II-2, nous nous intéresserons au cas de polynômes positifs sur des fermés quelconques de $\mathbb{R}^n$. En accord avec un théorème de E. Artin répondant au $17^{ième}$ problème de Hilbert (tout polynôme positif sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme somme de carrés de fractions rationnelles), nous utilisons une algèbre de fractions rationnelles $\mathcal{A}_\theta$ avec des dénominateurs particuliers de la forme $\theta^{-\beta}(t)$ avec $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ et $\theta_i(t) = (1+t_i^2)^{-1}$. Alors, en utilisant des résultats de [Pu-Vas2], on obtient le théorème suivant (ainsi que quelques résultats annexes, voir par exemple le théorème 2.2.13 ou la proposition 2.2.15 ; voir aussi le théorème 4.2 de [Pu-Vas2]) pour des polynômes de multi-degrés pairs :

2.2.11 Théorème : *Soit $(P_1, \cdots, P_k)$ un k-uplet de polynômes de multi-degrés pairs $2D_1, \cdots, 2D_k$ respectivement. Supposons que P soit un polynôme strictement positif sur $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$, de multi-degré $2D$. Si $\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{P}_k, \tilde{P}$ sont les polynômes associés à $P_1, \cdots, P_k$ et P, et si ce dernier vérifie $\tilde{P}(t) > 0$ pour tout t dans $H \cap \cap_{i=1}^k \tilde{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ (où H est défini au théorème 2.2.7) alors il existe un multi-indice positif M et un nombre fini de polynômes à coefficients réels notés $\{q_l\}_{l\in L}$ et $\{q_{i,l}\}_{i\in\{1,\cdots,k\},l\in L'}$ tel que :*

$$P(t) = \theta(t)^{2M}\Big(\sum_{l\in L} q_l^2(t) + \sum_{i=1}^k \sum_{l\in L'} P_i(t) q_{i,l}^2(t)\Big), t \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{Z}_+^n.$$

(ici les $\tilde{P}$ sont des polynômes associés au P qui se calculent de façon simple et explicite)

Pour le cas général (des polynômes de multi-degrés quelconques), nous sommes obligé d'introduire des fractions irrationnelles avec des dénominateurs de la forme $\delta^{-\beta}(t) = \theta^{-\beta/2}(t)$. nous obtenons alors une représentation un peu plus compliquée de la forme (où les $\hat{P}$ sont à nouveau des polynômes associés aux polynômes P, en fait ce sont leurs homogénéisations en chacune de leurs variables ; voir aussi le théorème 4.5 de [Pu-Vas2]) :

2.2.22 Théorème : *Soit $(P_1, \cdots, P_k)$ un k-uplet de polynômes de degrés arbitraires et soit P un polynôme strictement positif sur $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. Soient $\hat{P}_1, \cdots, \hat{P}_k, \hat{P}$ leurs polynômes homogènes (en chaque variable) associés respectivement. On suppose que l'on a $\hat{P}(x) > 0$ pour tout x non nul dans $G \cap \cap_{i=1}^k \hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ (où G est défini dans le théorème 2.2.19).*
Alors, il existe un multi-indice positif $M = (m_1, \cdots, m_n)$ et un nombre fini de polynômes à coefficients réels $\{q_l, q_{j,l}, r_{i,l}, r_{i,j,l}\}$, $l \in L$, $i \in \{1, \cdots, k\}$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ tels que l'on ait $\sqrt{1+t_1^2}^{m_1} \cdots \sqrt{1+t_n^2}^{m_n} P(t)$ qui s'écrive :

$$\sum_{l\in L} q_l^2(t, \Delta(t)) + \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l\in L} q_{j,l}^2(t, \Delta(t))$$

$$+ \sum_{i=1}^k P_i(t) \sum_{l\in L} r_{i,l}^2(t, \Delta(t)) + \sum_{i=1}^k P_i(t) \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l\in L} r_{i,j,l}^2(t, \Delta(t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^n$.

Pour achever ce chapitre, nous décrivons complétement les formes linéaires semi-définies positives sur l'algèbre $\mathcal{A}_\theta$ en termes de « moments avec limite » :

2.3.3 Théorème : *Soit Φ une forme linéaire positive semi-définie sur $\mathcal{A}_\theta$. Alors, il existe des mesures positives $(\rho_{i_1,\cdots,i_k})_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n, k=1,\cdots,n}$ et μ telles que l'on ait :*

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)d\mu(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)} \cdots \delta_\infty^{(i_k)} f(t)d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t), \qquad \forall f \in \mathcal{A}_\theta.$$

Dans la troisième partie, nous nous occuperons de la sous-normalité pour des multi-opérateurs. Dans un bref premier paragraphe, nous nous intéresserons au cas de multi-opérateurs bornés. Dans le cas borné, plusieurs critères de sous-normalité existent déjà. Pour un seul opérateur, on peut citer ceux de Halmos-Bram (1950-1955, voir [Hal] et [Br]) ou de M. Embry (1973, voir [Emb]). Ces résultats ont été généralisés par T. Itô (1958, voir [It]) et A. Lubin (1979, voir [Lub3]) dans le cas de familles d'opérateurs. Notre but sera de généraliser des résultats de A. Lubin (voir [Lub3]) et de F.-H. Vasilescu (voir [Vas2]). De plus, nous obtenons également une version multi-opératorielle de la caractérisation de sous-normalité de A. Athavale parue en 1988 dans [At] (voir Théorème 3.1.4) :

Mais le coeur de ce chapitre (et pour moitié dans cette thèse) est l'étude de la sous-normalité (jointe) dans le cas des multi-opérateurs non nécessairement bornés.

3.2.1 Définition : Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace $\mathcal{H}$, on dit que S est *formellement normal sur $\mathcal{D}$* si la famille $(S_1, \cdots, S_m)$ vérifie les conditions suivantes :

$$(3.2.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(S_j) \text{ et } S_j\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad j = 1, \cdots, m, \\ \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(S_j^*), \quad j = 1, \cdots, m, \\ ||S_jf|| = ||S_j^*f||, \quad f \in \mathcal{D}, \\ S_iS_j = S_jS_i \text{ sur } \mathcal{D}, \quad i, j = 1, \cdots, m. \end{cases}$$

3.2.2 Proposition : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* Hilbert *séparable $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace dense inclus dans $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$ tel que l'on ait $S_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $S_iS_j = S_jS_i$ sur $\mathcal{D}$ pour tout $i, j = 1, \cdots, m$. Alors S vérifie la condition de* Itô *sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $S|_\mathcal{D} = (S_1|_\mathcal{D}, \cdots, S_m|_\mathcal{D})$ admet une extension formellement normale $N = (N_1, \cdots, N_m)$, définie sur un domaine commun $\mathcal{D}(N_j) = \mathcal{D}'$ dans un espace de* Hilbert *$\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $N_j^*(\mathcal{D}') \subset \mathcal{D}'$ pour tout $j = 1, \cdots, m$.

(ii) $S_j|_\mathcal{D} \subset N_j$ pour tout $j = 1, \cdots, m$.

(iii) $N_i^*N_j = N_jN_i^*$ et $N_i^*N_j^* = N_j^*N_i^*$ sur $\mathcal{D}'$, pour tout couple (i, j) dans $\{1, \cdots, m\}^2$.

3.2.6 Théorème : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* Hilbert *$\mathcal{H}$. Soit, aussi, $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel inclus dans $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$ qui est dense dans $\mathcal{H}$ et qui vérifie $S_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $S_iS_j = S_jS_i$ sur $\mathcal{D}$ $(i, j = 1, \cdots, m)$. Alors, la famille $(S^\beta)_{\beta\leq\alpha}$ est mutuellement hyponormale sur $\mathcal{D}$ pour tout multi-indice $\alpha \geq (1, \cdots, 1)$ si et seulement si $S|_\mathcal{D} = (S_1|_\mathcal{D}, \cdots, S_m|_\mathcal{D})$ admet une extension formellement normale $N = (N_1, \cdots, N_m)$ définie sur un domaine commun $(\mathcal{D}' = \mathcal{D}(N_i))$ vérifiant les conditions (i)-(iii) de la proposition* 3.2.2.

3.3.2 Théorème : *Soit $T = (T_1, \cdots, T_n)$ un multi-opérateur non nécessairement borné et soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(T_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(T_n)$ un sous-espace vectoriel, dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par $T_1, \cdots, T_n$. Il existe un espace de* Hilbert *$\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$ et un multi-opérateur normal $N = (N_1, \cdots, N_n)$ défini dans $\mathcal{K}$ tels que l'on ait $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(N_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(N_n)$ et $T_j x = N_j x$ pour tout élément x dans $\mathcal{D}$ et pour tout j dans $\{1, \cdots, n\}$ si et seulement si il existe une $3n$-suite $\Theta = (\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n}$ de formes sesquilinéaires définies sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ vérifiant les cinq propriétés suivantes :*

(1) $\Theta_{0,0,0}(*, *) = \langle *, * \rangle|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}$.
(2) $\Theta_{0,e_j,0}(x, y) = \langle T^{e_j} x, y \rangle$ *pour tout* $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ *et pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$.
(3) $\Theta_{e_j,e_j,0}(x, x) = \Theta_{e_j,0,0}(T^{e_j} x, x) = ||T^{e_j} x||^2$, $j \in \{1, \cdots, n\}$, $x \in \mathcal{D}$.
(4) $\Theta_{\alpha,\beta,\delta} = \Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_j} + \Theta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j}$ *pour tout* $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}_+^n$ *et pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$.
(5) Θ *est de type positive.*

Parmi les autres critères, on peut citer une généralisation d'un résultat de J. Stochel et F.H. Szafraniec (voir [St-Sz2] en 1989) au cas de plusieurs variables (en utilisant leurs méthodes) :

3.3.11 Théorème : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* Hilbert *séparable $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense inclus dans $\mathcal{H}$ tel que $S_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $S_i S_j = S_j S_i$ sur $\mathcal{D}$ ($i, j = 1, \cdots, m$). Alors, le multi-opérateur $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal si et seulement si on a l'implication suivante :*

Si $\{a_{i,j}^{P,Q}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad P, Q \in \mathbb{Z}_+^m\}$ est une famille finie de nombres complexes,

$$(i) \qquad \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \, \overline{\lambda_i} \, \lambda_j \, \overline{z}^Q \, z^P \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^m,$$

implique l'inégalité

$$(ii) \qquad \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} \sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \, \langle S^{K+P} f_{j,L}, S^{L+Q} f_{i,K} \rangle \geq 0,$$

où $\{f_{i,K}, i \in \mathbb{Z}_+, K \in \mathbb{Z}_+^m\}$ est une famille presque nulle d'éléments dans $\mathcal{D}$.

De ces critères théoriques, nous pouvons obtenir plusieurs résultats qui étaient déjà connus pour un seul opérateur. Par exemple, si chaque composante est une bijection sur un sous-espace dense et si le multi-opérateur est sous-normal, la famille formée par les inverses de ces opérateurs est encore sous-normale (voir le corollaire 3.3.5). Pour un seul opérateur, ce résultat a été prouvé par J. Stochel et F.H. Szafraniec en 1989 dans [St-Sz2]. Pour terminer cette section, nous donnons plusieurs résultats sur la juxtaposition de familles d'opérateurs sous-normaux ainsi que sur des opérateurs ayant des domaines formés par des vecteurs analytiques (dans ce dernier cas, on essaie de retrouver des résultats de [St-Sz2] pour le cas de familles d'opérateurs.).

Toute la section 4 de ce chapitre sera dédiée aux multi-shifts (unilatéraux ou bilatéraux) à poids non nécessairement bornés. Nous utilisons les critères précédents pour obtenir des conditions de sous-normalité pour ces opérateurs. C. Berger énonce le résultat suivant (voir [Lam]) :

Théorème (C. Berger) : *Soit S un shift à poids avec comme suite de poids $(\alpha_n)_n$. Alors, l'opérateur S est sous-normal si et seulement si il existe une mesure de probabilité sur un intervalle $[0,a]$ tel que, pour tout n :*

$$||S^n e_0||^2 = \int_0^{\sqrt{a}} t^n d\mu(t),$$

où $a = ||S||$.

Ce résultat est généralisé en 1977 par A. Lubin, dans [Lub], au cas des multi-shifts continus et commutatifs. En 1989, J. Stochel et F.H. Szafraniec prouvent le même résultat pour un multi-shift à poids non borné (en intégrant sur $[0,+\infty[$). Le théorème 3.4.3, nous montre (par des méthodes complétement différentes) que ce résultat est encore valable pour des multi-shifts à poids non nécessairement bornés et commutatifs. On obtient en particulier la sous-normalité de l'opérateur de création en plusieurs variables. On obtient également des résultats similaires pour des shifts bilatéraux dans le théorème 3.4.9. Et comme corollaire plus compréhensif de prime abord, on a :

3.4.10 Corollaire : *Soit $\mathcal{H}$ un espace de* Hilbert *séparable et soit $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Soit aussi S un multi-shift à poids bilatéral permutable non nécessairement borné défini sur $Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m})$. Alors S est (jointement) sous-normal si et seulement si il existe une multi-suite de mesures positives à support dans $\mathbb{R}_+^m$ avec des moments à tous les ordres telles que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $||S^{-2K+P}\xi_0||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_K(t), \forall P \geq 0.$

(ii) $\int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{P+2(K'-K)}}{(1+t)^\beta} d\mu_{K'}(t) = \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^P}{(1+t)^\beta} d\mu_K(t)$, *pour chaque K et K' vérifiant $P + 2(K'-K) \geq 0$ et $P \geq 0$.*

Ensuite, nous utilisons nos critères de sous-normalité jointe ainsi que des méthodes de [St-Sz4] (basées sur les produits de Schur de multi-suites de moments de Stieltjes) pour donner des méthodes afin de construire un grand nombre d'exemples de multi-opérateurs non bornés sous-normaux (voi aussi [St-Sz4]) :

3.4.18 Théorème : *Soient R et S deux multi-shifts à poids sous-normaux vérifiant la condition $(\diamond)$. Soit T un multi-shift à poids commutatif et sous-normal. Alors pour tout multi-indice $\beta \geq 0$, les multi-opérateurs $R^{(*\beta)}S^{(\beta)}T$ et $TR^{(*\beta)}S^{(\beta)}$ sont sous-normaux.*

Enfin, nous terminons ce travail par quelques discussions sur la notion de minimalité pour ces multi-opérateurs non bornés. On donne la notion de minimalité de type spectral et de type cyclique, en accord avec les définitions données dans [St-Sz3] pour un seul opérateur. Ensuite, nous cherchons à relier le spectre de ces extensions minimales avec le spectre du multi-opérateur sous-normal. Pour ce faire, on utilise le spectre de Dash (noté Sp_D) pour prouver (voir aussi [D], [C-T]) :

3.5.14 Théorème : *Soit S un multi-opérateur sous-normal tel que $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$ soit dense dans $\mathcal{H}$. Soit N une extension normale de S. Si N_S est l'extension (S,N)-minimale, nous avons :*

$$Sp_D(N_S) \subset Sp_D(S).$$

Nous démontrons également que, pour un couple normal formé d'opérateurs non nécessairement bornés, le spectre joint de TAYLOR et de DASH coïncident :

3.5.20 Corollaire : *Soit $N = (N_1, N_2)$ un bi-opérateur normal tel que $\cap_{i=1}^{2} \mathcal{D}(N_i)$ soit dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par les N_i. Alors, on a les égalités suivantes :*

$$\sigma'_\pi(N) = \sigma_\pi(N) = Sp_D(N) = \sigma_{\mathbb{C}}(N).$$

Ce corollaire est une extension du théorème 2 de M. CHO et M. TAKAGUCHI (voir [C-T], voir également [S-Z]) où l'on montre dans le cas de multi-opérateurs normaux bornés que le spectre joint de Dash et le spectre joint de Taylor sont les mêmes. Nous utilisons des méthodes différentes puisqu'ici nous traitons le cas non-borné.