

RÉSUMÉ DES TRAVAUX.

Le problème des moments en plusieurs (n) variables est de caractériser les suites réelles $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ qui admettent une mesure positive μ , vérifiant

$$x_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} d\mu(t_1, \dots, t_n), \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Une telle mesure est alors appelée mesure de représentation de la multi-suite $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$. Ce problème a été étudié dès la fin du *XIX*ème siècle. Dans le cas d'une seule variable, le problème est bien connu. Dans le cas multi-variables, il est possible d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une telle mesure de représentation, mais ces conditions ne sont pas explicites, tout au moins dans le cas général. Plus particulièrement, on appelle *F*-problème des moments, le problème de l'existence d'une mesure de représentation dont le support est inclus dans un fermé *F*. Il faut alors différencier deux cas.

F compact : Dans ce cas, il est possible d'obtenir une caractérisation explicite. Des réponses partielles sont données par G. Cassier (cas des compacts d'intérieur non vide, 1984), par F.-H. Vasilescu (cas des compacts semi algébriques)... En s'inspirant des idées des auteurs précédemment cités, on donne des conditions explicites sur l'existence d'une mesure de représentation sur le compact *F*.

Théorème : *Soit $(p_1, p_2, \dots)$ une suite de polynômes de telle que $K = \bigcap_{i \geq 1} p_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$ (sans perte de généralité, on peut supposer que $\sup_K(p_i) \leq 1$ et que les $(p_i)_{i \geq 1}$ engendrent $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ en tant qu'algèbre). Alors, $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ ($\gamma_0 > 0$) est une suite de moments sur *K* si et seulement si la forme linéaire L_γ associée (donnée par $L_\gamma(t^\alpha) = \gamma_\alpha$) est positive sur l'ensemble *TEST* :*

$$p_{i_1}^{k_{i_1}} \dots p_{i_m}^{k_{i_m}} (1 - p_{i_1})^{l_{i_1}} \dots (1 - p_{i_m})^{l_{i_m}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad k_i, l_j \geq 0.$$

F non borné : Ce problème est beaucoup plus difficile à traiter. Une caractérisation est donnée en 1999 par M. Putinar et F.-H. Vasilescu. Cette caractérisation est basée sur une méthode d'extension de formes linéaires positives. On plonge l'algèbre des polynômes dans une algèbre de fractions rationnelles ayant des dénominateurs de la forme $(1 + t_1^2 + \dots + t_n^2)^m$, $m \in \mathbb{N}$. Soient les polynômes $p_j(t) = 1 + \sum_{k \in I_j} t_k^2$ ($I_1 \cup \dots \cup I_m = [1, n] \cap \mathbb{N}$). On définit l'algèbre

$$\mathcal{A} = \left\{ f(t) = \frac{Q(t)}{p_1(t)^{m_1} \dots p_k(t)^{m_k}}, \quad Q \text{ polynôme}, \quad m_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

On peut, en se basant les méthodes de M. Putinar et F.-H. Vasilescu, obtenir le résultat suivant :

Théorème : *Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{A}$. Alors ϕ est positive semi-définie si et seulement si elle admet une mesure de représentation unique μ .*

De ce théorème, nous en déduisons une caractérisation des suites de moments grâce à la forme linéaire associée (donnée par $L_\gamma(t^\alpha) = \gamma_\alpha$). On peut donner différentes

versions où l'on contrôle le support de la mesure de représentation. On peut également formuler des versions opératoriels du problème des moments où le support de la mesure est inclus dans des ensembles semi-algébriques non nécessairement bornés. Ceci nous permet également de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une multi-suite d'opérateurs auto-adjoints admette une mesure de représentation, positive, opératorielle. Nous pouvons noter que cela donne, en particulier, des résultats aux problèmes classiques (multi-dimensionnels et opératoriels) de Hamburger, de Stieltjes, de Hausdorff, etc. Enfin on obtient la transposition de résultats de Fuglede à notre cadre pour obtenir des réponses partielles à l'unicité de mesure de représentation (on utilise une version de la fonction majorante de Hall-Mergelyan pour notre famille). Il faut noter que le théorème cité précédemment est le point de départ de l'étude de la sous-normalité dont on parlera ensuite.

Une fois cette étude faite, je me suis intéressé à plusieurs problèmes connexes au problème des moments. Je me suis principalement occupé de la représentation polynômiale et de la sous-normalité (*i.e.* l'existence d'une éventuelle extension normale).

Représentation polynômiale : Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$, on cherche à donner une représentation des polynômes qui sont positifs sur ce fermé F . Comme pour le problème des moments, il faut différencier le cas où F est compact ou non. Dans cas où F est borné, on peut rechercher une représentation comme combinaison de polynômes. On peut donner des représentations faisant intervenir soit l'ensemble test précédent, soit des carrés de polynômes comme dans un article de M. Putinar de 1993. Par contre dans le cas où F n'est pas borné, il faut demander une représentation sous forme de carrés de fractions rationnelles. En effet, si on se place dans le cas de deux variables avec $F = \mathbb{R}^2$, il existe des polynômes strictement positifs sur $\mathbb{R}^2$ qui n'admettent pas de représentation de polynômes sous forme de carrés de polynômes (exemple dû à Motzkin en 1968):

$$x^2y^2(x^2 + y^2 - 1) + 1$$

En fait Hilbert connaissait l'existence de tels polynômes dès la fin du *XIX*ème siècle sans pouvoir en exhiber un exemple concret. C'est d'ailleurs pour cela qu'en 1900, il énonce le problème suivant (connu sous le nom de 17ième problème de Hilbert)

Tout polynôme positif sur $\mathbb{R}^n$, peut-il s'écrire comme somme de carrés de fractions rationnelles?

Une réponse affirmative est donnée par Artin en 1927. Et c'est donc en accord avec cette réponse que l'on cherche des représentations sous forme de carrés de fractions rationnelles dans le cas où F n'est pas bornée. Contrairement au résultat d'Artin, où l'on autorise toutes les fractions rationnelles, nous n'autoriserons dans notre représentation que des fractions ayant des dénominateurs très particuliers de la forme :

$$(1 + t_1^2)^{m_1} \dots (1 + t_n^2)^{m_n}, \quad (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Nous ne pouvons pas prouver que tous les polynômes positifs admettent une telle représentation mais nous avons la densité de ceux qui l'admettent.

Problème de la sous-normalité: Le problème de la sous-normalité a été posé dans les années 1940 par Halmos :

Caractériser les opérateurs bornés T sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui admettent une extension normale, c'est-à-dire tels qu'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ et un opérateur N normal ($NN^ = N^*N$) sur $\mathcal{K}$ vérifiant*

$$Tx = Nx, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Halmos (puis Itô pour le cas multi-opérateur) donne la caractérisation suivante

$$\sum_{i,j=1}^n \langle T^i x_j, T_j x^i \rangle \geq 0; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}.$$

Je me suis occupé de la sous-normalité pour des multi-opérateurs. Dans un premier temps, je me suis intéressé au cas de multi-opérateurs bornés. Dans le cas borné, plusieurs critères de sous-normalité existent déjà. En particulier, on peut donner des critères pour contrôler le spectre joint de certaines extensions normales. Je me suis surtout intéressé au cas des multi-opérateurs non nécessairement bornés. On peut donner une notion de sous-normalité formelle pour des multi-opérateurs commutatifs. Puis, on caractérise les opérateurs à domaine dense commun et invariant ayant cette propriété grâce en particulier au critère de positivité de Itô (i.e. : la condition de positivité au dessus). Cette caractérisation est une généralisation d'un critère de Athavale. On peut alors établir quelques résultats sur des extensions d'opérateurs commutants avec des opérateurs sous-normaux non bornés en utilisant des méthodes "classiques". Enfin, on donne plusieurs critères de sous-normalité pour des multi-opérateurs ayant un sous-espace dense invariant.

Théorème : *Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ un multi-opérateur non nécessairement borné et soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(T_1) \cap \dots \cap \mathcal{D}(T_n)$ un sous-espace vectoriel, dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par $T_1, \dots, T_n$. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ et un multi-opérateur normal $N = (N_1, \dots, N_n)$ défini dans $\mathcal{K}$ tels que l'on ait $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(N_1) \cap \dots \cap \mathcal{D}(N_n)$ et $T_j x = N_j x$ pour tout élément x dans $\mathcal{D}$ et pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$ si et seulement si il existe une $3n$ -suite $\Theta = (\Theta_{\alpha, \beta, \delta})_{\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}_+^n}$ de formes sesquilinéaires définies sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ vérifiant les cinq propriétés suivantes :*

- (1) $\Theta_{0,0,0}(*,*) = \langle *,* \rangle_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$.
- (2) $\Theta_{0,e_j,0}(x,y) = \langle T^{e_j} x, y \rangle$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.
- (3) $\Theta_{e_j,e_j,0}(x,x) = \Theta_{e_j,0,0}(T^{e_j} x, x) = \|T^{e_j} x\|^2, j \in \{1, \dots, n\}, x \in \mathcal{D}$.
- (4) $\Theta_{\alpha,\beta,\delta} = \Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_j} + \Theta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j}$ pour tout $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}_+^n$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.
- (5) Θ est de type positive.

Parmi les autres critères, on peut en particulier citer une généralisation d'un résultat de Stochel et Szafraniec au cas de plusieurs variables :

Théorème [St-Sz2] : *Soit S un multi-opérateur à domaine dense inclus dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que $S(\mathcal{D}(S)) \subset \mathcal{D}(S)$. Alors, l'opérateur S est sous-normal si et seulement si on a l'implication suivante :*

Si $\{a_{i,j}^{p,q}\}$ est une famille finie de nombres complexes,

$$(i) \quad \sum_{i,j \geq 0} \sum_{p,q \geq 0} a_{i,j}^{p,q} \overline{\lambda_i} \lambda_j \overline{z^q} z^p \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

implique l'inégalité

$$(ii) \quad \sum_{i,j \geq 0} \sum_{p,q \geq 0} \sum_{k,l \geq 0} a_{i,j}^{p,q} \langle S^{k+p} f_{j,l}, S^{l+q} f_{i,k} \rangle \geq 0,$$

où $\{f_{i,k}\}$ est une famille finie d'éléments dans $\mathcal{D}(S)$.

De ces critères théoriques, on peut obtenir des versions multi-opératorielles de résultats connus pour un seul opérateur. Par exemple, si chaque composante est une bijection sur un sous-espace dense et si le multi-opérateur est sous-normal, la famille formée par les inverses de ces opérateurs est encore sous-normale. On en déduit également plusieurs résultats sur la juxtaposition de familles d'opérateurs sous-normaux ainsi que sur des opérateurs ayant des domaines formés par des vecteurs analytiques.

Il est également possible de faire une étude plus précise de la sous-normalité des multi-shifts (unilatéraux ou bilatéraux) à poids non nécessairement bornés. Il est par exemple possible d'obtenir une version non continue et multi-opératorielle du théorème suivant :

Théorème (C. Berger) : *Soit S un shift à poids avec comme suite de poids $(\alpha_n)_n$. Alors, l'opérateur S est sous-normal si et seulement si il existe une mesure de probabilité sur un intervalle $[0,a]$ tel que, pour tout n :*

$$\|S^n e_0\|^2 = \int_0^{\sqrt{a}} t^n d\mu(t),$$

où $a = \|S\|$.

En utilisant des méthodes basées sur les produits de Schur de multi-suites de moments de Stieltjes, on donne des méthodes afin de construire un grand nombre d'exemples de multi-opérateurs non bornés sous-normaux. Pour finir avec cette étude sur la sous-normalité, on peut traiter la notion de minimalité pour ces multi-opérateurs non bornés (ou plutôt les notions, ce qui est une grande différence avec le cas borné). On donne la notion de minimalité de type spectral et de type cyclique. Ensuite, on relie le spectre de ces extensions minimales avec le spectre du multi-opérateur sous-normal. Pour ce faire, on utilise le spectre de Dash et on prouve des généralisations, au cas non borné, de résultats de Cho et Takaguchi (lien entre le spectre joint de Dash et le spectre joint de Taylor dans le cas normal).

J'ai poursuivi l'étude de la sous-normalité pour des familles d'opérateurs non nécessairement bornés (article paru en 2005 à *Studia Mathematica*). L'idée est de généraliser la caractérisation de T. Trent (1981), où le cas d'un opérateur borné a été traité. Plusieurs avancées dans ce domaine ont récemment été obtenues par T. Bînzar et D. Paunescu (2005) ainsi que Z.J. Jabłoński et J. Stochel (2005). En particulier, on peut donner l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $S = (S_1, \dots, S_m)$ un multi-opérateur non borné défini dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense inclus dans $\cap_j \mathcal{D}(S_j)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$S_j(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D} \quad \text{et} \quad S_i S_j x = S_j S_i x \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \dots, S_m|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal.
- (ii) Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ et une famille commutative d'opérateurs unitaires $(U_1, \dots, U_m) = U$, S -positifs, telle que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad S^{\alpha*} S^{\beta} x = S^{\beta*} P_{\mathcal{H}} U^{\beta-\alpha} S^{\alpha} x.$$

- (iii) Il existe une famille $(A_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{Z}^m}$ d'opérateurs, bornés sur $\mathcal{H}$, S -positifs telle que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad S^{\alpha*} S^{\beta} x = S^{\beta*} A_{\beta-\alpha} S^{\alpha} x.$$

En collaboration avec Augustion Mouze, nous nous sommes intéressés à plusieurs problèmes. Dans un premier temps, nous avons essayé de représenter des polynômes continus P sur un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$. On obtient en particulier une représentation faisant apparaître l'adjoint du shift unilatéral. On obtient ainsi, sous de bonnes conditions, l'existence d'un entier naturel i tel que l'on ait la décomposition

$$P(x) = \sum_{k=1}^l \left(\frac{Q_k(x)}{(1 + \|x\|^2)^{m_k}} \right)^2 + \|S^{*i} x\|^2 \sum_{k=1}^u \left(\frac{R_k(x)}{(1 + \|x\|^2)^{n_k}} \right)^2,$$

où m_k et n_k sont des entiers, Q_k et R_k des polynômes sur $\mathcal{H}$ et S^* l'adjoint du shift sur $\mathcal{H}$.

Ensuite, nous nous sommes intéressés au phénomène d'*Universalité* pour des séries de Dirichlet. Les méthodes sont basées sur des résultats de Bagchi et Bayart ainsi que sur des arguments de type Baire. On désigne par $\mathcal{D}_a(\mathbb{C}_+)$ l'espace de Fréchet des séries de Dirichlet qui convergent absolument sur $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) > 0\}$. On définit alors l'ensemble universel suivant:

Soit $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs (vérifiant certaines conditions naturelles). On note B_{ω} le "backward weighted shift" défini par

$$B_{\omega}(1) = 0 \text{ and } B_{\omega}(n^{-s}) = \frac{1}{\omega_{n-1}}(n-1)^{-s}, \quad \forall n \geq 2.$$

Définition : On note par $\mathcal{W}_a(\omega)$ l'ensemble des séries de Dirichlet $h = \sum h_k k^{-z} \in \mathcal{D}_a(\mathbb{C}_+)$ vérifiant : pour tout compact admissible K dans $\overline{\mathbb{C}_-}$, pour chaque $f \in \mathcal{D}_a(\mathbb{C}_+)$ et pour chaque fonction $g : K \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur K et holomorphe dans $\overset{\circ}{K}$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ telle que l'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{z \in K} \left| \sum_{k=1}^{\lambda_n} h_k k^{-z} - g(z) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ B_{\omega}^{\lambda_n}(h) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \text{ in } \mathcal{D}_a(\mathbb{C}_+). \end{array} \right.$$

On montre que cet ensemble est non vide, c'est un G_δ -dense de $\mathcal{D}_a(\mathbb{C}_+)$. On étudie, de même, plusieurs ensembles universels ($\mathcal{W}_d$, $\mathcal{W}_1$ voir [9]). On prouve des relations entre ces différents ensembles universels. Pour ce faire, on s'intéresse, en particulier, à des problèmes d'universalité dans l'espace de Wiener-Dirichlet. De plus, on obtient des estimations sur la croissance des coefficients de séries de Dirichlet universelles. En particulier, on prouve les résultats suivants :

Théorème : Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet de $\mathcal{W}_a$. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n \log(n)} < +\infty$. Alors, on a

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n|a_n|}{e^{\sqrt{b_n \log(n)}}} = +\infty.$$

En particulier, si $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ est une série de Dirichlet de $\mathcal{W}_a$, pour tout entier naturel k , on a

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n|a_n|}{(\log(n))^k} = +\infty.$$

De plus, on obtient des représentations de séries de Dirichlet à l'aide de séries de Dirichlet universelles. Par exemple, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème : Soit $f = \sum_{n \geq 1} d_n n^{-s}$ une série de Dirichlet de $\mathcal{D}_a(\mathbb{C}_+)$. Alors, il existe $g_1 = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ et $g_2 = \sum_{n \geq 1} b_n n^{-s}$ dans $\mathcal{W}_1$ telles que $f = g_1 + g_2$ sur $\mathbb{C}_+$ avec la condition

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} n|a_n| = \limsup_{n \in \mathbb{N}} n|b_n| = \limsup_{n \in \mathbb{N}} n|d_n|.$$