Programme de Colles

Semaine 9

du 21 au 26 novembre.

Séries Numériques : généralités

1. Définitions des séries (convergentes et divergentes), des sommes partielles d'ordre n (S_n), de la somme d'une série convergente, de la nature d'une série.
2. La nature d'une série n'est pas modifiée si on change un nombre fini de termes.
3. Changement d'indice de départ, dans le cas des séries convergentes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$
4. Lien entre convergence de la série et convergence du terme général. Contre-exemple avec la série harmonique.
5. Reste d'ordre n (R_n) d'une série convergente, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_n + R_n$. Convergence du reste.
6. Opérations sur les séries convergentes. Convergence d'une série à termes complexes, utilisation des parties réelles et imaginaires.
7. Séries géométriques : convergence, calcul de la somme et du reste dans le cas d'une série géométrique convergente.
8. Séries téléscopiques (sur exemple seulement)

Séries à termes positifs.

1. Généralités : croissance de la suite formée par les sommes partielles.
2. Théorème de majoration, d'équivalence.
3. Séries de Riemann, caractérisation de la convergence de ces séries.
4. Règles "$n^\alpha u_n$."
5. Critère de d'Alembert.

Séries à termes quelconques.

1. critère de divergence : $\displaystyle\sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k$ ne converge pas vers 0 où $\alpha_n \leq \beta_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.
2. Absolue convergence : définition, stabilité par combinaison linéaire.
3. Théorème "absolue convergence $\Rightarrow$ convergence".(**admis**)
4. Règles pour la convergence absolue.
5. Exemple : la convergence de la série n'implique pas que (nu_n) tende vers 0. Vrai si la suite est décroissante.
6. Séries alternées. Définition, théorème pour certaines séries alternées. Encadrement de la somme, majoration du reste.

7. Séries de Riemann alternées. Application aux contre-exemples du théorème des équivalents dans le cas où u_n n'est pas de signe constant.
8. Lien entre $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} f(k)$ avec $\displaystyle\int_p^q f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{p+1}^{q+1} f(t)dt$ dans le cas de fonctions croissantes et décroissantes.

   Attention : on n'a pas parlé d'intégrale généralisée. Par souci d'unité, je n'ai pas mis dans ce programme de colle le début des séries en tières.

Programme semaine 10 (probable) : chapitre "Séries numériques" complet + "Séries entières"

Proposition de questions de cours pour les séries numériques :

La liste des questions de cours pour les séries n'est pas exhaustive.

Séries géométriques ; Condition nécessaire de convergence des séries ($u_n \to 0$) ; séries de Riemann alternées ; Théorème sur certaines séries alternées.