PT - Lycée du Hainaut **2005-2006**

Programme de Colles

Semaine 8

du 14 au 18 novembre.

Polynôme caractéristique et valeurs propres :

1. Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme (dim finie), exemples (homothétie, projecteur, symétrie), $A \sim B \Rightarrow \chi_A = \chi_B$ (**Démo**), termes dominant et constant de χ_A.
2. Lien avec les valeurs propres, $A \in M_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A possède au moins une valeur propre, valeurs propres des matrices triangulaires, ordre de multiplicité m_λ de $\lambda \in Sp(A)$,

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$$

   (**Démo** d'abord pour les endomorphismes, puis pour les matrices), résutats analogues pour les endomorphismes.

Diagonalisation :

1. Matrice ou endomorphisme diagonalisable, équivalence f diagonalisable $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(f)$ diagonalisable (**Démo**).
2. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}(E) \text{ diagonalisable} &\iff E \text{ admet une base de vecteurs propres pour } f \ (def.) \\ &\iff M_{\mathcal{B}}(f) \text{ diagonalisable, pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } E \\ &\iff \chi_f \text{ est scindé et } \forall \lambda \in Sp(f), \dim(E_\lambda) = m_\lambda \\ &\iff \dim(E) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda) \end{aligned}$$

   (**Démo** de la dernière équivalence seulement).

   Condition suffisante de diagonalisabilité (χ_A est scindé à racines simples, i.e. f ou A admet n valeurs propres distinctes), importance du choix de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
3. Détermination d'une base de vecteurs propres (en collant des bases de tous les sous-espaces propres (**Admis**)), diagonalisations de matrices et d'endomorphismes.

Trigonalisation :

1. Matrice, endomorphisme trigonalisable, équivalence f trigonalisable $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(f)$ trigonalisable.
2. Caractérisation : A est trigonalisable $\iff \chi_A$ est scindé (**Admis**), conséquence : sur $\mathbb{C}$ toutes les matrices sont trigonalisables. (analogue pour les endomorphismes)

   Mis à part les cas des dimensions 2 et 3, donner la forme de la matrice triangulaire à obtenir. Les sous-espaces caractéristiques, la décomposition de Jordan sont hors programme : les étudiants ne connaissent pas de méthode générale de trigonalisation.

Applications :

1. Calcul de puissances de matrices.
2. Suites récurrentes linéaires simultannées d'ordre 1 à coefficients constants.
3. Suites récurrentes linéaires suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_p u_{n+p} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = d.$$

Séries Numériques : généralités

1. Définitions des séries (convergentes et divergentes), des sommes partielles d'ordre n (S_n), de la somme d'une série convergente, de la nature d'une série.
2. La nature d'une série n'est pas modifiée si on change un nombre fini de termes.
3. Changement d'indice de départ, dans le cas des séries convergentes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$
4. Lien entre convergence de la série et convergence du terme général. Contre-exemple avec la série harmonique.
5. Reste d'ordre n (R_n) d'une série convergente, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_n + R_n$. Convergence du reste.
6. Opérations sur les séries convergentes. Convergence d'une série à termes complexes, utilisation des parties réelles et imaginaires.
7. Séries géométriques : convergence, calcul de la somme et du reste dans le cas d'une série géométrique convergente.
8. Séries téléscopiques (sur exemple seulement)

Séries à termes positifs.

1. Généralités : croissance de la suite formée par les sommes partielles.
2. Théorème de majoration, d'équivalence.
3. Séries de Riemann, caractérisation de la convergence de ces séries.
4. Règles "$n^\alpha u_n$."
5. Critère de d'Alembert.

On peut toujours faire quelques révisions sur les développements limités.

Programme semaine 9 (probable) : chapitre "Séries numériques" complet. Début des "Séries entières" ? ?

Proposition de question de cours pour les séries :

On peut bien sûr poser des questions de cours sur la réduction. La liste des questions de cours pour les séries n'est pas exhaustive.

Règles "$n^\alpha u_n$" ; Critère de d'Alembert ; Séries géométriques ; Condition nécessaire de convergence des séries ($u_n \to 0$).