PT - Lycée du Hainaut **2005-2006**

Programme de Colles

Semaine 18

du 6 au 11 février.

Intégrales impropres.

1. définition des intégrales impropres, de la convergence, intégrales impropres "trivialement" convergentes (existence d'une limite finie en une extrémité finie).
2. Découpage d'une intégrale impropre. Définition d'une intégrale impropre avec un "problème" de définition en chaque extrémité de l'intervalle.
3. Fonctions à valeurs complexes, lien avec la convergence de l'intégrale impropre de la partie réelle et de la partie imaginaire.
4. Intégrale impropre de fonctions à valeurs réelles positives : caractérisation, théorème de majoration et de comparaison.
5. Intégrales de références dans le cas d'un intervalle borné : $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^1 \ln(t) dt$.
6. Intégrales de références dans le cas d'un intervalle non borné : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.
7. Intégrales absolument convergentes : lien avec les intégrales convergentes
8. Intégrales semi-convergentes.
   Attention : Pour calculer des intégrales convergentes, l'intégration par parties et les changements de variables sont IMPÉRATIVEMENT à effectuer dans des intégrales "usuelles" et ensuite on passe à la limite.
9. Lien entre $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ et $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ pour des fonctions continues, décroissantes et à valeurs positives.

Intégration sur un intervalle quelconque.

1. Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle. I.
2. Lien avec la convergence absolue des intégrales impropres.
3. Relation de Chasles, inégalité de la moyenne, formule de changement de variables pour les fonctions intégrables.

Intégrale dépendant d'un paramètre.

1. Théorème de continuité pour $g(x) = \int_I f(x,t) dt$. Importance de l'hypothèse de domination.
2. Corollaire du théorème de continuité en s'intéressant aux segments.
3. Théorème de dérivation sous le signe $\int$, fonction de classe C^1. Formule de Leibniz :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt.$$

4. Corollaire du théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ en s'intéressant aux segments.
5. Corollaire du théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ pour les fonctions de classe C^p :

$$\forall k \in \{1,\ldots,p\}, \quad g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt.$$

Fonctions de plusieurs variables réelles.

1. Définition (uniquement !!) de l'adhérence d'un ensemble.
2. Application f de $A \subset \mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: définition de la limite de f en un point adhérent à A.
3. Propriétés des limites : Unicité, limite d'une combinaison linéaire de fonctions ayant des limites en $a = (a_1,\ldots,a_p) \in \overline{A}$.
4. Définition de la continuité en un point, sur un ensemble. Lien avec la continuité des fonctions composantes. Opérations sur les fonctions continues.
   Exemples : continuité de la "norme" $x = (x_1,\ldots,x_p) \to ||x||_p$ (où $|| * ||_p$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$) et des projections sur la i^{eme} composante.
5. Lien entre continuité et continuité des fonctions partielles. Étude de la réciproque avec le contre-exemple : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = (0,0)$.
6. Fonction bornée sur un ensemble.
7. L'image d'un fermé borné par une fonction continue est un fermé borné.
8. Fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$: définition de la dérivée de f en $a = (a_1,\ldots,a_p)$ selon le vecteur h : $D_h f(a)$.
9. Fonction de classe C^1 sur un ouvert U. Existence du développement limité à l'ordre 1. Lien avec la continuité.
10. Différentielle en un point pour une fonction de classe C^1 sur un ouvert U. Notation différentielle. Matrice jacobienne, Jacobien. Opération sur les différentielles (combinaison linéaire, composée), Jacobienne d'une composée de fonction de classe C^1.
11. Gradient, lien avec la différentielle.
12. C^1-difféomorphisme, propriétés, différentielle de ϕ^{-1} en fonction de celle de ϕ.
13. Appliaction de classe C^k, théorème de Schwarz
14. Extrema de fonctions numériques. Condition à l'ordre 1. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions de classe C^2 sur un ouvert U.
15. Si j'ai le temps :notation de Monge, règle du "$rt - s^2$."

Questions de cours :

Pas de question de cours cette semaine puisque la quasi totalité des théorèmes sont admis.