

Programme de Colles

Semaine 17

du 30 janvier au 4 février.

Fonction d'une variable réelle.

1. parité, imparité et périodicité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
2. Limite et continuité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
3. Dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées, fonctions n fois dérivables. Définition des fonctions de classe C^n , C^∞ . Opérations sur les dérivées. Formules de Leibniz pour le produit externe, le produit scalaire et le produit vectoriel (dans le cas de la dimension 3).
4. Rappel théorème de Rolle, image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.
5. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Inégalité de la moyenne. Sommes de Riemann.
6. Intégration par parties, changement de variables.
7. DL d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, opération sur les développements limités. Formule de Taylor-Young.

Intégrales impropres.

1. définition des intégrales impropres, de la convergence, intégrales impropres "trivialement" convergentes (existence d'une limite finie en une extrémité finie).
2. Découpage d'une intégrale impropre. Définition d'une intégrale impropre avec un "problème" de définition en chaque extrémité de l'intervalle.
3. Fonctions à valeurs complexes, lien avec la convergence de l'intégrale impropre de la partie réelle et de la partie imaginaire.
4. Intégrale impropre de fonctions à valeurs réelles positives : caractérisation, théorème de majoration et de comparaison.
5. Intégrales de références dans le cas d'un intervalle borné : $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^1 \ln(t) dt$.
6. Intégrales de références dans le cas d'un intervalle non borné : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.
7. Intégrales absolument convergentes : lien avec les intégrales convergentes
8. Intégrales semi-convergentes.

Attention : Pour calculer des intégrales convergentes, l'intégration par parties et les changements de variables sont IMPÉRATIVEMENT à effectuer dans des intégrales "usuelles" et ensuite on passe à la limite.

9. Lien entre $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ et $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ pour des fonctions continues, décroissantes et à valeurs positives.

Intégration sur un intervalle quelconque.

1. Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle. I .
2. Lien avec la convergence absolue des intégrales impropres.
3. Relation de Chasles, inégalité de la moyenne, formule de changement de variables pour les fonctions intégrables.

Intégrale dépendant d'un paramètre.

1. Théorème de continuité pour $g(x) = \int_I f(x, t)dt$. Importance de l'hypothèse de domination.
2. Corollaire du théorème de continuité en s'intéressant aux segments.
3. Théorème de dérivation sous le signe $\int$, fonction de classe C^1 . Formule de Leibniz :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

4. Corollaire du théorème de dérivation sous le signe $\int$ en s'intéressant aux segments.
5. Corollaire du théorème de dérivation sous le signe $\int$ pour les fonctions de classe C^p :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)dt.$$

Questions de cours :

Pas de question de cours cette semaine puisque la quasi totalité des théorèmes sont admis.

La semaine prochaine : On commence les fonctions de plusieurs variables réelles et à valeurs vectorielles.