PT - Lycée du Hainaut **2005-2006**

Programme de Colles

Semaine 16

du 23 au 28 janvier.

Topologie de $\mathbb{R}^m$.

1. Rappel de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$, distance associée. Propriétés de la distance associée à la norme : inégalité triangulaire, inégalité inverse....
2. Définition des boules fermées et des boules ouvertes. Exemples dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Définition d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^m$, propriétés de l'union et de l'intersection. Exemples : boules ouvertes.
4. Définition d'une partie fermée de $\mathbb{R}^m$, propriétés de l'union et de l'intersection. Exemples : boules fermées.
5. Suites à valeurs dans $\mathbb{R}^m$: convergence, unicité de la limite, toute suite convergente est bornée. Caractérisation de la convergence à l'aide des suites coordonnées. Opérations sur les suites convergentes.
6. En exercice, on a prouvé l'unicité du rayon et du centre d'une boule fermée.

Fonction d'une variable réelle.

1. parité, imparité et périodicité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
2. Limite et continuité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
3. Dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées, fonctions n fois dérivables. Définition des fonctions de classe C^n, C^∞. Opérations sur les dérivées. Formules de Leibniz pour le produit externe, le produit scalaire et le produit vectoriel (dans le cas de la dimension 3).
4. Rappel théorème de Rolle, image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.
5. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Inégalité de la moyenne. Sommes de Riemann.
6. Intégration par parties, changement de variables.
7. DL d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, opération sur les développements limités. Formule de Taylor-Young.

Intégrales impropres.

1. définition des intégrales impropres, de la convergence, intégrales impropres "trivialement" convergentes (existence d'une limite finie en une extrémité finie).
2. Découpage d'une intégrale impropre. Définition d'une intégrale impropre avec un "problème" de définition en chaque extrémité de l'intervalle.
3. Fonctions à valeurs complexes, lien avec la convergence de l'intégrale impropre de la partie réelle et de la partie imaginaire.
4. Intégrale impropre de fonctions à valeurs réelles positives : caractérisation, théorème de majoration et de comparaison.

5. Intégrales de références dans le cas d'un intervalle borné : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$.
6. Intégrales de références dans le cas d'un intervalle non borné : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$.
7. Intégrales absolument convergentes : lien avec les intégrales convergentes
8. Intégrales semi-convergentes.

   Attention : Pour calculer des intégrales convergentes, l'intégration par parties et les changements de variables sont IMPÉRATIVEMENT à effectuer dans des intégrales "usuelles" et ensuite on passe à la limite.

Proposition de questions :

- Exemples de Riemann pour les intégrales.
- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.
- Théorème de Majoration-Comparaison pour les intégrales de fonctions à valeurs réelles positives.

La semaine prochaine : fonctions intégrables sur un intervalle, changement de variables, relation de Chasles. Comparaisons séries-intégrales. Début des intégrales dépendant d'un paramètre.