PT - Lycée du Hainaut **2005-2006**

Programme de Colles

Semaine 15

du 16 au 21 janvier.

Description de $\mathcal{O}(E)$ dans le cas du plan.

1. Description de $\mathcal{O}(2)$ et $\mathcal{SO}(2)$.
2. Représentation de $\mathcal{SO}(E)$ en base orthonormée directe.
3. Recherche de l'angle d'une rotation. Formules : Pour tout vecteur unitaire a :
   1) $\cos\theta = \langle a, f(a)\rangle$
   2) $\sin\theta = det_{\mathcal{B}}(a, f(a))$ pour tout base orthonormale directe $\mathcal{B}$.
4. Étude des isométries vectorielles indirectes.

Description de $\mathcal{O}(E)$ dans le cas de l'espace.

1. Orientation d'un plan par un vecteur normal.
2. Étude de $\mathcal{SO}(E)$. Représentation matricielle.
3. Recherche de l'angle et de l'axe d'une rotation : Soit f la rotation d'axe D orienté par le vecteur unitaire $\vec{a}$ et d'angle de mesure θ.
   - Pour tout vecteur UNITAIRE $\vec{x}$ orthogonal à l'axe, on a :
   $$f(x) = \cos\theta\vec{x} + \sin\theta(\vec{a}\wedge\vec{x}).$$
   $$\langle\vec{x}; f(\vec{x})\rangle = \cos\theta \quad \text{et} \quad \vec{x}\wedge f(\vec{x}) = \sin\theta\vec{a}.$$
   - Le réel θ est défini modulo 2π par l'égalité $tr(f) = 1 + 2\cos\theta$ et le signe de $\sin\theta$, égal à celui de $det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{a})$ pour tout vecteur $\vec{u}$ n'appartenant pas à l'axe et toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$.
4. Étude des réflexions et représentation des rotations comme composée de réflexions.
5. Étude des antirotations.

Topologie de $\mathbb{R}^m$.

1. Rappel de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$, distance associée. Propriétés de la distance associée à la norme : inégalité triangulaire, inégalité inverse....
2. Définition des boules fermées et des boules ouvertes. Exemples dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Définition d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^m$, propriétés de l'union et de l'intersection. Exemples : boules ouvertes.
4. Définition d'une partie fermée de $\mathbb{R}^m$, propriétés de l'union et de l'intersection. Exemples : boules fermées.
5. Suites à valeurs dans $\mathbb{R}^m$: convergence, unicité de la limite, toute suite convergente est bornée. Caractérisation de la convergence à l'aide des suites coordonnées. Opérations sur les suites convergentes.
6. En exercice, on a prouvé l'unicité du rayon et du centre d'une boule fermée.

Fonction d'une variable réelle.

1. parité, imparité et périodicité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
2. Limite et continuité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
3. Dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées, fonctions n fois dérivables. Définition des fonctions de classe C^n, C^∞. Opérations sur les dérivées. Formules de Leibniz pour le produit externe, le produit scalaire et le produit vectoriel (dans le cas de la dimension 3).
4. Rappel théorème de Rolle, image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.
5. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Inégalité de la moyenne. Sommes de Riemann.
6. Intégration par parties, changement de variables.
7. DL d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, opération sur les développements limités. Formule de Taylor-Young.

Proposition de questions :

Le programme étant plutôt un programme de révision, on ne demandera pas de question de cours cette semaine.

La semaine prochaine : On commence les intégrales impropres.