PT - Lycée du Hainaut **2005-2006**

Programme de Colles

Semaine 14

du 9 au 16 janvier.

Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens : généralités

1. Définition d'une forme bilinéaire sur $E \times E$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Formes bilinéaires symétriques, positives, définies.
3. Définition d'un produit scalaire, d'un espace préhilbertien réel, d'un espace euclidien. Différents exemples ont été traités dans le cours (produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$ $a < b$.)
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz (avec cas de l'égalié).
5. Inégalité de Minkowski (avec cas de l'égalié).
6. Définition d'une norme. Norme euclidienne associée à un produit scalaire (exemples de normes euclidiennes et d'utilisation des inégalités étudiées)
7. Identités classiques : identité du parallélogramme, formules de polarisation.

Orthogonalité dans un espace préhibertien réel E.

1. Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs, de deux sous espaces vectoriels, d'une partie de E.
2. Propriétés de l'orthogonalité.
3. Définition d'une famille orthogonale, orthonormale, lien avec le fait d'être libre lorsque tous les vecteurs de la famille sont non nuls.
4. théorème de Pythagore, relation de pythagore pour $n(> 2)$ vecteurs.
5. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Base orthonormale et espaces euclidiens

1. Définition d'une base orthonormale, exemples. Application à l'écriture du produit scalaire, de la norme euclidienne.
2. Existence de base orthonormale pour tout espace euclidien non réduit à $\{0\}$.
3. Théorème de la "base orthonormale incomplète".
4. écriture des formes linéaires sur E.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

1. $E = F \oplus F^{\perp}$.
2. Projection orthogonale, écriture à l'aide d'une base orthonormale de F.
3. distance à un sous-espace vectoriel F définie par la borne inférieure.
4. La borne inférieure est un minimum atteint en un seul vecteur de F. Lien avec la projection orthogonale.
5. inégalité de Bessel.
6. symétries orthogonales.

7. Application aux calculs de minima.

Endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

1. représentation matriciel d'un endomorphisme dans une BON. Application au calcul de la trace.
2. Endomorphismes orthogonaux. Liens entre conservation du produit scalaire et de la norme.
3. caractérisation à l'aide des transformations de BON en BON.
4. Groupe orthogonal. Propriétés spectrales.
5. Matrices orthogonales, caractérisation à l'aide des colonnes et des lignes. Lien entre la transposée et l'inverse des matrices orthogonales.
6. caractérisation matricielle : matrice de changement de bases orthonormales, matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

1. définition, matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.
2. Réduction des endomorphismes symétriques : orthogonalité des sous-espaces propres, $f(F) \subset F \to f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.
3. Lien (caractérisation) avec les projections orthogonales et les symétries orthogonales.

Formes quadratiques.

1. Définition, première propriétés.
2. Formes polaires, matrice d'une forme bilinéaire relativement à une base. Représentation matricielle d'une forme bilinéaire symétrique.
3. Polynômes quadratiques, réduction des formes quadratiques en bases orthonormales, application aux coniques.

Description de $\mathcal{O}(E)$ dans le cas du plan.

1. Description de $\mathcal{O}(2)$ et $\mathcal{SO}(2)$.
2. Représentation de $\mathcal{SO}(E)$ en base orthonormée directe.
3. Recherche de l'angle d'une rotation. Formules : Pour tout vecteur unitaire a :
   1) $\cos\theta = \langle a, f(a)\rangle$
   2) $\sin\theta = det_{\mathcal{B}}(a, f(a))$ pour tout base orthonormale directe $\mathcal{B}$.
4. Étude des isométries vectorielles indirectes.

Description de $\mathcal{O}(E)$ dans le cas de l'espace.

1. Orientation d'un plan par un vecteur normal.
2. Étude de $\mathcal{SO}(E)$. Représentation matricielle.
3. Recherche de l'angle et de l'axe d'une rotation : Soit f la rotation d'axe D orienté par le vecteur unitaire $\vec{a}$ et d'angle de mesure θ.
   - Pour tout vecteur UNITAIRE $\vec{x}$ orthogonal à l'axe, on a :

$$f(x) = \cos\theta\vec{x} + \sin\theta(\vec{a} \wedge \vec{x}).$$

$$\langle \vec{x}; f(\vec{x})\rangle = \cos\theta \quad \text{et} \quad \vec{x} \wedge f(\vec{x}) = \sin\theta\vec{a}.$$

- Le réel θ est défini modulo 2π par l'égalité $tr(f) = 1 + 2\cos\theta$ et le signe de $\sin\theta$, égal à celui de $det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{a})$ pour tout vecteur $\vec{u}$ n'appartenant pas à l'axe et toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

4. Étude des réflexions et représentation des rotations comme composée de réflexions.
5. Petite étude sur les antirotations.

Proposition de questions :

Le programme étant plutôt un programme de révision sur tout ce qui a été fait depuis plusieurs semaines, on ne demandera pas de question de cours cette semaine.

La semaine prochaine : On commence la topologie de $\mathbb{R}^n$. Il y a très peu de choses au programme et on enchaine par des "révisions" sur la dérivation et l'intégration avant de se lancer sur les intégrales impropres.