PT - Lycée du Hainaut **2005-2006**

Programme de Colles

Semaine 11

du 5 au 10 décembre.

Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens : généraliés

1. Définition d'une forme bilinéaire sur $E \times E$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Formes bilinéaires symétriques, positives, définies.
3. Définition d'un produit scalaire, d'un espace préhilbertien réel, d'un espace euclidien. Différents exemples ont été traités dans le cours (produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$ $a < b$.)
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz (avec cas de l'égalié).
5. Inégalité de Minkowski (avec cas de l'égalié).
6. Définition d'une norme. Norme euclidienne associée à un produit scalaire (exemples de normes euclidiennes et d'utilisation des inégalités étudiées)
7. Identités classiques : identité du parallélogramme, formules de polarisation.

Orthogonalité dans un espace préhibertien réel E.

1. Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs, de deux sous espaces vectoriels, d'une partie de E.
2. Propriétés de l'orthogonalité.
3. Définition d'une famille orthogonale, orthonormale, lien avec le fait d'être libre lorsque tous les vecteurs de la famille sont non nuls.
4. théorème de Pythagore, relation de pythagore pour $n(> 2)$ vecteurs.
5. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Base orthonormale et espaces euclidiens

1. Définition d'une base orthonormale, exemples. Application à l'écriture du produit scalaire, de la norme euclidienne.
2. Existence de base orthonormale pour tout espace euclidien non réduit à $\{0\}$.
3. Théorème de la "base orthonormale incomplète".
4. écriture des formes linéaires sur E.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

1. $E = F \oplus F^{\perp}$.
2. Projection orthogonale, écriture à l'aide d'une base orthonormale de F.
3. distance à un sous-espace vectoriel F définie par la borne inférieure.
4. La borne inférieure est un minimum atteint en un seul vecteur de F. Lien avec la projection orthogonale.
5. inégalité de Bessel.
6. symétries orthogonales.

7. Application aux calculs de minima.

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien.

1. représentation matriciel d'un endomorphisme dans une BON. Application au calcul de la trace.
2. Endomorphismes orthogonaux. Liens entre conservation du produit scalaire et de la norme.
3. caractérisation à l'aide des transformations de BON en BON.
4. Groupe orthogonal. Propriétés spectrales.

Programme semaine 13 (probable) : Reprise du programme de cette semaine sur les espaces préhilbertiens réels. Projections orthogonales sur un sous espace de dimension finie. Endomorphismes orthogonaux et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

Proposition de questions :

La liste des questions de cours n'est pas exhaustive.

Orthogonalisation de Schmidt, existence de BON pour un espace euclidien, inégalité de Cauchy-Schwarz, caractérisation des endomorphismes orthogonaux à l'aide des transformations de BON en BON.