PT - Lycée du Hainaut **2005-2006**

Programme de Colles

Semaine 10

du 28 novembre au 3 décembre.

Séries Numériques : généralités

1. Définitions des séries (convergentes et divergentes), des sommes partielles d'ordre n (S_n), de la somme d'une série convergente, de la nature d'une série.
2. La nature d'une série n'est pas modifiée si on change un nombre fini de termes.
3. Changement d'indice de départ, dans le cas des séries convergentes : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$
4. Lien entre convergence de la série et convergence du terme général. Contre-exemple avec la série harmonique.
5. Reste d'ordre n (R_n) d'une série convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_n + R_n$. Convergence du reste.
6. Opérations sur les séries convergentes. Convergence d'une série à termes complexes, utilisation des parties réelles et imaginaires.
7. Séries géométriques : convergence, calcul de la somme et du reste dans le cas d'une série géométrique convergente.
8. Séries téléscopiques (sur exemple seulement)

Séries à termes positifs.

1. Généralités : croissance de la suite formée par les sommes partielles.
2. Théorème de majoration, d'équivalence.
3. Séries de Riemann, caractérisation de la convergence de ces séries.
4. Règles "$n^\alpha u_n$."
5. Critère de d'Alembert.

Séries à termes quelconques.

1. critère de divergence : $\sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k$ ne converge pas vers 0 où $\alpha_n \leq \beta_n$ et $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.
2. Absolue convergence : définition, stabilité par combinaison linéaire.
3. Théorème "absolue convergence $\Rightarrow$ convergence".(**admis**)
4. Règles pour la convergence absolue.
5. Exemple : la convergence de la série n'implique pas que (nu_n) tende vers 0. Vrai si la suite est décroissante.
6. Séries alternées. Définition, théorème pour certaines séries alternées. Encadrement de la somme, majoration du reste.

7. Séries de Riemann alternées. Application aux contre-exemples du théorème des équivalents dans le cas où u_n n'est pas de signe constant.
8. Lien entre $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} f(k)$ avec $\displaystyle\int_p^q f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{p+1}^{q+1} f(t)dt$ dans le cas de fonctions croissantes et décroissantes.
   Attention : on n'a pas parlé d'intégrale généralisée.

Séries entières.

1. Définition, Lemme d'Abel, rayon de convergence, disque ouvert de convergence (absolue), cercle d'incertitude, règles sur les rayons de convergence (majoration, équivalent), théorème de d'Alembert pour les séries entières, application au cas où les coefficients sont des fractions en "n".
2. Opération sur les séries entières, série entière dérivée, fonction somme.
3. Propriété de la fonction somme d'une série entière (variable réelle) : **Tout est admis,** conformément au programme : continuité sur l'intervalle de convergence, continuité au bord, dérivation et intégration (avec conservation du rayon de convergence). Application au calcul du développement limité de la fonction somme en 0.
4. Développement en série entière en 0 : définition, condition nécessaire d'existence du développement (de classe C^∞ au voisinage de 0). Contre-exemple. Unicité d'un éventuel développement, série de Taylor. Quid si la fonction est paire ou impaire.
5. Opérations sur sur les fonctions développables en séries entières : opérations algébriques, dérivée et primitive de fonctions développables.
6. Développement classiques au programme : $\dfrac{1}{1+x}$, $\log(1+x)$, $\exp(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Programme semaine 11 (probable) : "Séries entières", fonction exponentielle complexe et sans doute formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Proposition de questions de cours pour les séries entières :

La liste des questions de cours pour les séries n'est pas exhaustive.

lemme d'Abel ; Régle de d'Alembert, application aux coefficients sous forme de fraction rationnelle en "n", développement en série entière en 0 de cos par l'équation différentielle.