Numéro d'ordre : 3118

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE I

U.F.R DE MATHÉMATIQUES

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Olivier DEMANZE

Problème des moments multi-dimensionnel et sous-normalité jointe.

soutenue le 11 Octobre 2002 devant la commission d'examen :

Président :	Pr. Jean ESTERLE	Université de Bordeaux I.
Directeur :	Pr. Florian-Horia VASILESCU	Université de Lille I.
Rapporteurs :	Pr. Ernst ALBRECHT	Université des Saarlandes, Saarbrücken, Allemagne.
	Pr. Vladimir MÜLLER	Académie des Sciences, Prague, République Tchéque.
Examinateurs :	Pr. Gilles CASSIER	C.R. au C.N.R.S. Université de Lyon I.
	Pr. Mostafa MBEKHTA	Université de Lille I.
	Pr. Hervé QUEFFELEC	Université de Lille I.

Remerciements

Je tiens, dans un premier temps, à exprimer mon extrême gratitude à monsieur FLORIAN-HORIA VASILESCU, qui m'a dirigé depuis mon mémoire de D.E.A. avec la plus grande compétence et la plus grande disponibilité. Il m'a fait découvrir ce qu'était la recherche. Son soutien et sa gentillesse m'ont énormément apporté pendant l'élaboration de cette thèse. Sa passion des mathématiques (qu'il a essayé de me faire partager) ainsi que nos nombreuses discussions m'ont beaucoup apporté.

Je tiens donc à remercier chaleureusement Monsieur VASILESCU sans qui ce travail n'aurait jamais pu voir le jour.

Je suis très touché de l'honneur que me fait le Professeur JEAN ESTERLE d'avoir consenti à être le président de jury de cette thèse.

Je remercie également les professeurs ERNST ALBRECHT et VLADIMIR MÜLLER d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail, d'avoir pris sur leur temps précieux pour lire cette thèse et pour m'avoir apporté des remarques judicieuses.

Ma gratitude va également à messieurs les professeurs GILLES CASSIER, MOSTAFA MBEKHTA et HERVÉ QUEFFELEC qui ont accepté d'examiner cette thèse et de me faire l'honneur de faire partie du jury.

Je tiens également à remercier MIHAIL PUTINAR avec qui j'ai pu avoir plusieurs discussions mathématiques lors de sa venue à Lille en 2000. Il a fait preuve d'une grande gentillesse à mon égard et m'a dirigé vers des travaux que je ne connaissais pas.

Je remercie également tout le laboratoire de mathématiques de Lille 1, *A.G.A.T.*, au sein duquel j'ai effectué ce travail, en particulier le groupe d'analyse fonctionnelle et les doctorants.

Enfin, je voudrais remercier ma famille pour son soutien moral et matériel tout au long de mes études, en particulier mes parents, mon frère et Virginie.

Index :

Introduction

Le terme « Problème des moments » apparait à la fin du $XIX^{ième}$ siècle dans deux articles de T. Stieltjes (1894 et 1895) [1] : « We shall give the name moment problem to the following problem : it is required to find the distribution of positive mass on the interval $[0, \infty)$, given the moments of order k ($k = 0, 1, 2, \cdots$) of distribution » [2]. Quelques années plus tard, H. Hamburger [3] résolut le problème qui porte maintenant son nom : trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure positive telle que l'on ait la représentation intégrale

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k d\sigma(u), \quad k \geq 0,$$

où $(s_k)_k$ est une suite de réels (ou de complexes) donnée. A cette époque, de nombreuses avancées sur le problème des moments furent obtenues par différentes méthodes grâce notemment à P. Nevanlinna, M. Riesz, E. Hellinger et T. Carleman.

A ce problème général se sont gréffées des questions annexes, en imposant des contraintes supplémentaires sur le support de la mesure positive σ (l'un des problèmes les plus célébres est peut-être celui de Hausdorff où l'on demande que le support de la mesure soit inclus dans le compact [0,1]).

Autant le problème sur $\mathbb{R}$ est bien connu (tout au moins le problème de l'existence, pas forcément celui de l'unicité de la mesure de représentation), autant le passage en plusieurs variables pose de nombreuses interrogations. Le problème majeur est que tout polynôme positif sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) ne peut pas s'écrire comme la somme de carrés de polynômes (fait connu dès la fin du $XIX^{ième}$ siècle et prouvé par Hilbert). Il faut quand même attendre la seconde moitié du $XX^{ième}$ siècle pour avoir des exemples concrets de ce phénomène (voir [BCR], [Rob], etc.). Pour trouver des informations sur le problème des moments, on peut se plonger dans plusieurs ouvrages faisant référence en la matière : [S-T], [Ak-Kr], [Ak], etc. ou par exemple un article de B. Simon : [Si].

Le but de ce travail est d'apporter quelques réponses au problème des moments multi-dimensionnel ainsi qu'à quelques problèmes connexes comme la représentation de polynômes positifs sur des fermés ou la sous-normalité (jointe) pour des familles d'opérateurs. Ces trois problèmes seront traités, dans cet ordre, dans les chapitres I, II et III.

Dans un premier temps, dans le chapitre I, nous nous intéresserons au problème

1. Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** pp.J1-J122, 1894, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **9** pp.A5-A47, 1895.

2. Distribution de masse positive sur $[0, \infty)$ signifie fonction non décroissante σ (définie sur l'ensemble des $u \geq 0$) telle que pour tout $\alpha \geq 0$ et $\beta > \alpha$, $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$ représente la masse de l'intervalle $[\alpha, \beta)$.

3. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems, *Math. Ann.,* **81,** 235-319 (1920)

des moments sur un compact, c'est à dire que l'on imposera que le support de la mesure soit inclus dans un compact choisi K. Ce problème est souvent appelé K-problème des moments. Le premier à résoudre cette question est G. Cassier pour des compacts d'intérieur non-vide : l'idée est basée sur l'introduction de polynômes de la forme $p^\alpha(1-p)^\beta$ comme dans la résolution du problème de Hausdorff (voir [Cas2]). En 1998 dans [Vas2], F.-H. Vasilescu donne une condition plus explicite pour le cas des compacts semi-algébriques :

Théorème [Vas2] : *Soit $(p_1, \cdots, p_m)$ un m-uplet de polynômes de tel que $\cap_{i=1}^m p_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$ soit un compact K de $\mathbb{R}^n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\sup_K(p_i) \leq 1$. On demande également que les $(p_i)_i$ engendrent $\mathbb{R}[X]$ en tant qu'algèbre. Alors, $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ $(\gamma_0 > 0)$ est une suite de moments sur K si et seulement si la forme linéaire associée (donnée par $t^\alpha \to \gamma_\alpha$) est positive sur l'ensemble :*

$$p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}(1-p_1)^{l_1} \cdots (1-p_m)^{l_m}, \quad k_i, l_j \geq 0.$$

Grâce à une remarque liant la géométrie du compact K à la positivité des polynômes, nous généralisons les résultats de [Cas2] et [Vas2] au cas des compacts arbitraires et on obtient une caractérisation explicite des suites de moments sur un compact arbitraire K. Cette caractérisation est obtenue au théorème 1.1.7 (et nous généralisons des résultats connus auparavant uniquement pour les compacts convexes, non vide ou semi-algébriques). Les résultats ainsi énoncés dans le cas réel s'appliquent au cas complexe grâce à des méthodes de complexification (voir par exemple [Pu], [St-Sz5]). Cette partie a fait l'objet d'une note parue aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* en 2000 (voir [De2]).

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous immergeons l'algèbre des polynômes dans des algèbres de fractions rationnelles pour donner des réponses aux problèmes des moments non bornés (comme celui de Stieltjes et de Hamburger, dans le cas multi-dimensionnel) en utilisant des méthodes parues en 1999 dans un article de M. Putinar et F.-H. Vasilescu ([Pu-Vas2]), méthodes basées sur la construction d'une famille normale d'opérateurs. L'idée de plonger l'algèbre des polynômes dans une algèbre plus grande est récente. Elle apparaît ainsi dans une note au C.R.A.S. en 1991 (voir [Gi-Se]). La différence majeure, dans notre cas, est que nous n'obtenons pas directement la famille normale. Le fait de généraliser les résultats de [Pu-Vas2] nous permettra de donner, dans la suite, des résultats de sous-normalité pour des multi-opérateurs non nécessairement bornés. La méthode est basée sur une construction classique de I.M. Gelfand et M.A. Naimark. Si nous notons par $\mathcal{S}^2$ le cône positif engendré par les carrés des polynômes, nous obtenons le résultat suivant (voir aussi le théorème 2.5 de [Pu-Vas2], qui se retrouve avec $I_1 = [1, n] \cap \mathbb{Z}_+$) :

1.2.5 Théorème : *Soit $(p_1, \cdots, p_m)$ un m-uplet de polynômes de $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}_n[X]$, sans aucun zéro dans $\mathbb{R}^n$, de la forme :*

$$p_j(t) = 1 + \sum_{k\in I_j} t_k^2 + \sum_{l\in L_j} r_{j,l}(t)^2,$$

avec $I_1 \cup \cdots \cup I_m = [1,n] \cap \mathbb{Z}_+$. Soit ϕ une forme linéaire positive semi-définie sur $\mathcal{R}_\theta$ telle que les formes $\{\phi(r_{j,l}*)\}_{(j,l)\in\{1,\cdots,m\}\times L_j}$ le soient également. Alors ϕ admet une unique mesure de représentation μ, dont le support est inclus dans $\cap_{(j,l)\in\{1,\cdots,m\}\times L_j} r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$. La réciproque est également vraie.

De ce théorème, nous en déduisons une caractérisation des suites de moments grâce à la forme linéaire associée sur les polynômes. On donne ensuite une version opératorielle du problème des moments sur des ensembles semi-algébriques non nécessairement bornés. Ceci nous permet également de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une multi-suite d'opérateurs auto-adjoints admette une mesure de représentation positive opératorielle. Nous pouvons noter que cela donne, en particulier, des résultats au problème (multi-dimensionnel et opératoriel) de HAMBURGER, de STIELTJES, de HAUSDORFF, etc.

Pour achever ce chapitre, nous donnons quelques éléments sur la détermination de suites doubles $(x_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ de moments par rapport à la famille de fonctions $t^\alpha(1+t^2)^{-\beta}$. Nous obtenons en particulier des transpositions de résultats de B. FUGLEDE (voir [Fu2], en 1983) ainsi qu'un pendant à la fonction majorante de Hall-Mergelyan pour notre famille (voir [Be], [Koo], etc.).

Dans le deuxième chapitre de ce travail, nous essayerons de donner des représentations de polynômes positifs sur des fermés non nécessairement bornés. Comme dans le chapitre précédent, nous nous intéresserons, dans un premier temps, au cas des compacts arbitraires. Nous commençons par généraliser des résultats de [Cas2] et [Vas2] au cas des compacts arbitraires grâce à une suite dénombrable de polynômes comme dans le cas du théorème 1.1.7. Puis, nous cherchons une représentation en termes de carrés de polynômes comme dans un article de M. PUTINAR paru en 1993 (voir [Pu2]), où le cas des compacts semi-algébriques a été traité :

Théorème [Pu2] : *Soit K un compact semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$. Soit $(p_1,\cdots,p_m)$ une famille de polynômes telle que $K = \cap_i p_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$. Tout polynôme strictement positif sur K est dans le cône positif $\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2$.*

(où on a $\mathcal{S}_K^2 = \mathcal{S}^2 + p_1\mathcal{S}^2 + \cdots + p_m\mathcal{S}^2$ et p_∞ est un polynôme du type de ceux qui apparaissent dans [Cas2] *et qui est en particulier strictement positif sur K.)*

Nous prouvons, en fait, que ce théorème peut s'étendre au cas des compacts arbitraires quitte à choisir une famille infinie de polynômes.

Enfin dans la section II-2, nous nous intéresserons au cas de polynômes positifs sur des fermés quelconques de $\mathbb{R}^n$. En accord avec un théorème de E. ARTIN répondant au $17^{ième}$ problème de HILBERT (tout polynôme positif sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme somme de carrés de fractions rationnelles), nous utilisons une algèbre de fractions rationnelles $\mathcal{A}_\theta$ avec des dénominateurs particuliers de la forme $\theta^{-\beta}(t)$ avec $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ et $\theta_i(t) = (1+t_i^2)^{-1}$. Alors, en utilisant des résultats de [Pu-Vas2], on obtient le théorème suivant (ainsi que quelques résultats annexes, voir par exemple le théorème 2.2.13 ou la proposition 2.2.15 ; voir aussi le théorème 4.2 de [Pu-Vas2]) pour des polynômes de multi-degrés pairs :

2.2.11 Théorème : *Soit* $(P_1, \cdots, P_k)$ *un* k*-uplet de polynômes de multi-degrés pairs* $2D_1, \cdots, 2D_k$ *respectivement. Supposons que* P *soit un polynôme strictement positif sur* $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$*, de multi-degré* $2D$*. Si* $\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{P}_k, \tilde{P}$ *sont les polynômes associés à* $P_1, \cdots, P_k$ *et* P*, et si ce dernier vérifie* $\tilde{P}(t) > 0$ *pour tout* t *dans* $H \cap \cap_{i=1}^k \tilde{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ *(où* H *est défini au théorème* 2.2.7*) alors il existe un multi-indice positif* M *et un nombre fini de polynômes à coefficients réels notés* $\{q_l\}_{l \in L}$ *et* $\{q_{i,l}\}_{i \in \{1,\cdots,k\}, l \in L'}$ *tel que :*

$$P(t) = \theta(t)^{2M}(\sum_{l \in L} q_l^2(t) + \sum_{i=1}^k \sum_{l \in L'} P_i(t) q_{i,l}^2(t)), t \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{Z}_+^n.$$

(ici les $\tilde{P}$ sont des polynômes associés au P qui se calculent de façon simple et explicite)

Pour le cas général (des polynômes de multi-degrés quelconques), nous sommes obligé d'introduire des fractions irrationnelles avec des dénominateurs de la forme $\delta^{-\beta}(t) = \theta^{-\beta/2}(t)$. nous obtenons alors une représentation un peu plus compliquée de la forme (où les $\hat{P}$ sont à nouveau des polynômes associés aux polynômes P, en fait ce sont leurs homogénéisations en chacune de leurs variables ; voir aussi le théorème 4.5 de [Pu-Vas2]) :

2.2.22 Théorème : *Soit* $(P_1, \cdots, P_k)$ *un* k*-uplet de polynômes de degrés arbitraires et soit* P *un polynôme strictement positif sur* $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$*. Soient* $\hat{P}_1, \cdots, \hat{P}_k, \hat{P}$ *leurs polynômes homogènes (en chaque variable) associés respectivement. On suppose que l'on a* $\hat{P}(x) > 0$ *pour tout* x *non nul dans* $G \cap \cap_{i=1}^k \hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ *(où* G *est défini dans le théorème* 2.2.19*).*
Alors, il existe un multi-indice positif $M = (m_1, \cdots, m_n)$ *et un nombre fini de polynômes à coefficients réels* $\{q_l, q_{j,l}, r_{i,l}, r_{i,j,l}\}$*,* $l \in L$*,* $i \in \{1, \cdots, k\}$*,* $j \in \{1, \cdots, n\}$ *tels que l'on ait* $\sqrt{1+t_1^2}^{m_1} \cdots \sqrt{1+t_n^2}^{m_n} P(t)$ *qui s'écrive :*

$$\sum_{l \in L} q_l^2(t, \Delta(t)) + \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l \in L} q_{j,l}^2(t, \Delta(t))$$

$$+ \sum_{i=1}^k P_i(t) \sum_{l \in L} r_{i,l}^2(t, \Delta(t)) + \sum_{i=1}^k P_i(t) \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l \in L} r_{i,j,l}^2(t, \Delta(t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^n$.

Les deux premières sections de ce chapitre ont fait l'objet de deux articles, l'un paru en 2000 dans *Journal of mathematical analysis and applications* (voir [De]) et l'autre à paraître dans la revue *Positivity* (voir [De3]).

Pour achever ce chapitre, nous décrivons complétement les formes linéaires semi-définies positives sur l'algèbre $\mathcal{A}_\theta$ en termes de « moments avec limite » (voir le théorème 2.3.3). De cette décomposition, nous en déduisons une réponse au problème tronqué multi-dimensionnel et nous généralisons un résultat de M. Riesz.

Dans la troisième partie de cette thèse, nous nous occuperons de la sous-normalité pour des multi-opérateurs. Dans un bref premier paragraphe, nous nous intéresserons au cas de multi-opérateurs bornés. Dans le cas borné, plusieurs critères de sous-normalité existent déjà. Pour un seul opérateur, on peut citer ceux de Halmos-Bram (1950-1955, voir [Hal] et [Br]) ou de M. Embry (1973, voir [Emb]). Ces résultats ont été généralisés par T. Itô (1958, voir [It]) et A. Lubin (1979, voir [Lub3]) dans le cas de familles d'opérateurs. Notre but sera de généraliser des résultats de A. Lubin (voir [Lub3]) et de F.-H. Vasilescu (voir [Vas2]). De plus, nous obtenons également une version multi-opératorielle de la caractérisation de sous-normalité de A. Athavale parue en 1988 dans [At] (voir Théorème 3.1.4) :

Théorème [At] : *Soit S un opérateur borné sur un espace de* Hilbert *séparable $\mathcal{H}$. La famille $(I, S, S^2, \cdots, S^p)$ est mutuellement hyponormale pour tout indice vérifiant $p \geq 1$ si et seulement si S est sous-normal.*

Mais le coeur de ce chapitre (et pour moitié dans cette thèse) est l'étude de la sous-normalité (jointe) dans le cas des multi-opérateurs non nécessairement bornés.

Nous commençons par donner une notion de sous-normalité formelle pour des multi-opérateurs commutatifs. Puis nous caractérisons les opérateurs à domaine dense commun et invariant ayant cette propriété grâce en particulier au critère de positivité de Itô : voir la proposition 3.2.2. Cette caractérisation est une généralisation du critère de A. Athavale cité plus haut au cas des multi-opérateurs non-bornés. Ensuite, nous prouvons quelques résultats sur des extensions d'opérateurs commutants avec des opérateurs sous-normaux non bornés en utilisant des méthodes classiques.

Enfin, dans la section 3 de ce chapitre, nous donnons plusieurs critères de sous-normalité pour des multi-opérateurs ayant un sous-espace dense invariant. Le premier utilise des idées de F.-H. Vasilescu ainsi que les généralisations sur le problème des moments que nous avons prouvées dans le premier chapitre :

3.3.2 Théorème : *Soit $T = (T_1, \cdots, T_n)$ un multi-opérateur non nécessairement borné et soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(T_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(T_n)$ un sous-espace vectoriel, dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par $T_1, \cdots, T_n$. Il existe un espace de* Hilbert *$\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$ et un multi-opérateur normal $N = (N_1, \cdots, N_n)$ défini dans $\mathcal{K}$ tels que l'on ait $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(N_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(N_n)$ et $T_j x = N_j x$ pour tout élément x dans $\mathcal{D}$ et pour tout j dans $\{1, \cdots, n\}$ si et seulement si il existe une $3n$-suite $\Theta = (\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta \in \mathbb{Z}_+^n}$ de formes sesquilinéaires définies sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ vérifiant les cinq propriétés suivantes :*

(1) $\Theta_{0,0,0}(*, *) = \langle *, * \rangle|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}$.
(2) $\Theta_{0,e_j,0}(x, y) = \langle T^{e_j} x, y \rangle$ *pour tout* $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ *et pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$.
(3) $\Theta_{e_j,e_j,0}(x, x) = \Theta_{e_j,0,0}(T^{e_j} x, x) = ||T^{e_j} x||^2$, $j \in \{1, \cdots, n\}$, $x \in \mathcal{D}$.
(4) $\Theta_{\alpha,\beta,\delta} = \Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_j} + \Theta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j}$ *pour tout* $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}_+^n$ *et pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$.
(5) Θ *est de type positive.*

Parmi les autres critères, on peut citer une généralisation d'un résultat de J. Stochel et F.H. SZAFRANIEC (voir [St-Sz2] en 1989) au cas de plusieurs variables (en utilisant leurs méthodes) :

Théorème [St-Sz2] : *Soit S un multi-opérateur à domaine dense inclus dans un espace de* HILBERT $\mathcal{H}$ *tel que $S(\mathcal{D}(S)) \subset \mathcal{D}(S)$. Alors, l'opérateur S est sous-normal si et seulement si on a l'implication suivante :*

Si $\{a_{i,j}^{p,q}\}$ est une famille finie de nombres complexes,

$$(i) \qquad \sum_{i,j\geq 0} \sum_{p,q\geq 0} a_{i,j}^{p,q}\, \overline{\lambda_i}\, \lambda_j\, \overline{z}^q\, z^p \ \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

implique l'inégalité

$$(ii) \qquad \sum_{i,j\geq 0} \sum_{p,q\geq 0} \sum_{k,l\geq 0} a_{i,j}^{p,q} \langle S^{k+p} f_{j,l}, S^{l+q} f_{i,k} \rangle \geq 0,$$

où $\{f_{i,k}\}$ est une famille finie d'éléments dans $\mathcal{D}(S)$.

De ces critères théoriques, nous pouvons obtenir plusieurs résultats qui étaient déjà connus pour un seul opérateur. Par exemple, si chaque composante est une bijection sur un sous-espace dense et si le multi-opérateur est sous-normal, la famille formée par les inverses de ces opérateurs est encore sous-normale (voir le corollaire 3.3.5). Pour un seul opérateur, ce résultat a été prouvé par J. STOCHEL et F.H. SZAFRANIEC en 1989 dans [St-Sz2]. Pour terminer cette section, nous donnons plusieurs résultats sur la juxtaposition de familles d'opérateurs sous-normaux ainsi que sur des opérateurs ayant des domaines formés par des vecteurs analytiques (dans ce dernier cas, on essaie de retrouver des résultats de [St-Sz2] pour le cas de familles d'opérateurs.).

Toute la section 4 de ce chapitre sera dédiée aux multi-shifts (unilatéraux ou bilatéraux) à poids non nécessairement bornés. Nous utilisons les critères précédents pour obtenir des conditions de sous-normalité pour ces opérateurs. C. BERGER énonce le résultat suivant (voir [Lam]) :

Théorème (C. Berger) : *Soit S un shift à poids avec comme suite de poids $(\alpha_n)_n$. Alors, l'opérateur S est sous-normal si et seulement si il existe une mesure de probabilité sur un intervalle $[0, a]$ tel que, pour tout n :*

$$||S^n e_0||^2 = \int_0^{\sqrt{a}} t^n d\mu(t),$$

où $a = ||S||$.

Ce résultat est généralisé en 1977 par A. LUBIN, dans [Lub], au cas des multi-shifts continus et commutatifs. En 1989, J. STOCHEL et F.H. SZAFRANIEC prouvent le même résultat pour un multi-shift à poids non borné (en intégrant sur $[0, +\infty[$). Le théorème 3.4.3, nous montre (par des méthodes complétement différentes) que ce résultat est encore valable pour des multi-shifts à poids non nécessairement bornés et commutatifs. On obtient en particulier la sous-normalité de l'opérateur de création en plusieurs variables. On obtient également des résultats similaires pour des shifts bilatéraux dans le théorème 3.4.9. Et comme corollaire plus compréhensif de prime abord, on a :

3.4.10 Corollaire : *Soit $\mathcal{H}$ un espace de* HILBERT *séparable et soit $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m \in \mathbb{Z}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Soit aussi S un multi-shift à poids bilatéral permutable non nécessairement borné défini sur $Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m})$. Alors S est (jointement) sous-normal si et seulement si il existe une multi-suite de mesures positives à support dans $\mathbb{R}_+^m$ avec des moments à tous les ordres telles que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $||S^{-2K+P}\xi_0||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_K(t), \forall P \geq 0.$

(ii) $\int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{P+2(K'-K)}}{(1+t)^\beta} d\mu_{K'}(t) = \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^P}{(1+t)^\beta} d\mu_K(t)$, *pour chaque K et K' vérifiant $P + 2(K'-K) \geq 0$ et $P \geq 0$.*

Ensuite, nous utilisons nos critères de sous-normalité jointe ainsi que des méthodes de [St-Sz4] (basées sur les produits de SCHUR de multi-suites de moments de STIELTJES) pour donner des méthodes afin de construire un grand nombre d'exemples de multi-opérateurs non bornés sous-normaux (voi aussi [St-Sz4]) :

3.4.18 Théorème : *Soient R et S deux multi-shifts à poids sous-normaux vérifiant la condition $(\diamond)$. Soit T un multi-shift à poids commutatif et sous-normal. Alors pour tout multi-indice $\beta \geq 0$, les multi-opérateurs $R^{(*\beta)}S^{(\beta)}T$ et $TR^{(*\beta)}S^{(\beta)}$ sont sous-normaux.*

Enfin, nous terminons ce travail par quelques discussions sur la notion de minimalité pour ces multi-opérateurs non bornés. On donne la notion de minimalité de type spectral et de type cyclique, en accord avec les définitions données dans [St-Sz3] pour un seul opérateur. Ensuite, nous cherchons à relier le spectre de ces extensions minimales avec le spectre du multi-opérateur sous-normal. Pour ce faire, on utilise le spectre de Dash (noté Sp_D) pour prouver (voir aussi [D], [C-T]) :

3.5.14 Théorème : *Soit S un multi-opérateur sous-normal tel que $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$ soit dense dans $\mathcal{H}$. Soit N une extension normale de S. Si N_S est l'extension (S, N)-minimale, nous avons :*

$$Sp_D(N_S) \subset Sp_D(S).$$

Nous démontrons également que, pour un couple normal formé d'opérateurs non nécessairement bornés, le spectre joint de TAYLOR et de DASH coïncident :

3.5.20 Corollaire : *Soit $N = (N_1, N_2)$ un bi-opérateur normal tel que $\cap_{i=1}^2 \mathcal{D}(N_i)$ soit dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par les N_i. Alors, on a les égalités suivantes :*

$$\sigma'_\pi(N) = \sigma_\pi(N) = Sp_D(N) = \sigma_{\mathbb{C}}(N).$$

Ce corollaire est une extension du théorème 2 de M. Cho et M. Takaguchi (voir [C-T], voir également [S-Z]) où l'on montre dans le cas de multi-opérateurs normaux bornés que le spectre joint de Dash et le spectre joint de Taylor sont les mêmes. Nous utilisons des méthodes différentes puisqu'ici nous traitons le cas non-borné.

Chapitre I

Problème multi-dimensionnel des moments

La difficulté essentielle que l'on rencontre en essayant de résoudre le problème des moments dans le cas de plusieurs variables vient, en particulier, du fait que l'on ne peut pas représenter tout polynôme positif comme une somme de carrés de polynômes (voir le lemme 3.1 page 190 dans [BCR], voir également le chapitre II de [BoCoRo] pour des exemples classiques). On peut pourtant donner une solution dans le cas où l'on impose que le support de la mesure à déterminer soit inclus dans un compact K. Plusieurs contributions donnent des résultats pour des compacts particuliers : G. Cassier, dans [Cas2] résout le problème dans le cas où le compact est d'intérieur non vide (il s'est également occupé des compacts convexes dans [Cas]), puis K. Schmüdgen et F.-H. Vasilescu, dans respectivement [Sch2] et [Vas2], donnent une solution dans le cas de compacts semi-algébriques (voir aussi [Pu-Vas] pour une approche différente).

Partie I.1 Problème sur un compact arbitraire

Notre but, ici, est d'adapter des méthodes utilisées par Gilles Cassier (dans [Cas2]) et Florian-Horia Vasilescu (dans [Vas2]) afin de donner une condition explicite, en termes de positivité, pour qu'une suite soit ou non une suite de moments sur un compact arbitraire K. Cette partie a fait l'objet d'une note parue aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* en 2000 (voir [De2]). Par commodité pour les lecteurs, nous donnerons tous les détails des démonstrations même lorsqu'elles ne sont que des généralisations simples des résultats des deux auteurs cités précédemment.

1.1.1 Préliminaires :
Soit K un compact arbitraire de $\mathbb{R}^n$. On notera pour toute fonction f continue sur cet ensemble K :

$$(1.1.1) \qquad ||f||_{K,\infty} = \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

Soit $\mathcal{P}(K)$ l'ensemble des restrictions des polynômes au compact K. Enfin, soit $\mathcal{P}_+(K)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}(K)$ qui sont positifs ou nuls sur K. Nous commencerons par un lemme qui caractérise tous les compacts de $\mathbb{R}^n$, idée dont parle G. Cassier dans [Cas2]. Ce lemme nous permet de relier la géométrie des compacts à la positivité de polynômes et donc, en particulier, au problème des moments. C'est ce qui explique, d'ailleurs, pourquoi les quatre auteurs précédemment cités utilisaient des compacts semi-algébriques ou convexes (car tout compact convexe peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'images réciproques de polynômes de degré un).

1.1.2 Lemme : *Soit K un compact arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une suite de polynômes $(P_i)_{i\geq 0}$ (que l'on peut choisir de telle sorte que chacun de leur degré global soit inférieur ou égal à 2) telle que l'on puisse écrire K sous la forme :*

$$K = \bigcap_{i\geq 0} P_i^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

Démonstration.
Soit $\mathbb{Q}^n$ l'ensemble des multi-points à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable, on écrit sous forme d'une suite $(a_i)_{i\geq 0}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}^n \cap K^c$ (où K^c représente le complémentaire de K dans $\mathbb{R}^n$). On notera les coordonnées de chaque a_i par $(a_{i,1}, \cdots, a_{i,n})$; cette famille est évidemment dense dans K^c qui est ouvert. Soit δ_i la distance (usuelle) du point a_i à K, on a trivialement l'inégalité $\delta_i > 0$ car K est, en particulier, un ensemble fermé. On note alors par $B_i = B(a_i, \delta_i)$ la boule de centre a_i et de rayon δ_i. On définit alors les polynômes P_i par l'égalité suivante :

$$P_i(X) = -\delta_i^2 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - a_{i,k})^2. \tag{1.1.2}$$

Bien entendu, pour tout entier i positif et pour tout $t \in K$, on a :

$$P_i(t) = dist(a_i, t)^2 - dist(a_i, K)^2 \geq 0.$$

Ceci implique que l'on ait l'inclusion $K \subset \cap_{i\geq 0} P_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

Inversement, supposons que $t \notin K$. Si t appartient à $\mathbb{Q}^n$, on peut écrire $t = x_{i_0}$ pour un i_0 donné positif, et dans ce cas, on obtient que $P_{i_0}(t) = -\delta_{i_0}^2 < 0$. Si $t \in K^c \cap (\mathbb{Q}^n)^c$, on pose $\varepsilon = dist(t, K) > 0$, comme $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, il existe a_i tel que $||a_i - t|| \leq \varepsilon/3$ (où $||*||$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$). Donc, pour tout $z \in K$, on a $||z - t|| \leq ||a_i - z|| + ||a_i - t||$ et donc on obtient l'inégalité :

$$||a_i - z|| \geq ||z - t|| - ||a_i - t|| \geq 2\varepsilon/3.$$

Par conséquent, on en déduit que la distance $dist(a_i, K)$ vérifie $dist(a_i, K) \geq 2\varepsilon/3$. Comme $||a_i - t|| \leq \varepsilon/3$, il s'ensuit que $t \in B_i$ et $P_i(t) < 0$. Et finalement, on a $K = \bigcap_{i\geq 0} P_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$, ce qui achève la démonstration. ■

De plus, on peut noter que la famille $(P_i)_{i\geq 1}$ engendre, en tant qu'algèbre, l'ensemble des polynômes, $\mathbb{R}[X]$, tout entier (quitte à rajouter le polynôme constant et égal à 1) : en effet, fixons un entier i_0, alors $P_{i_0} - P_j$ s'écrit :

$$(P_{i_0} - P_j)(X) = 2\sum_{1\leq k\leq n}(a_{j,k} - a_{i_0,k})X_k + \delta_j^2 - \delta_{i_0}^2 + \sum_{1\leq k\leq n} a_{i_0,k}^2 - a_{j,k}^2. \tag{1.1.3}$$

On peut alors, grâce à la densité des $(a_j)_{j\geq 0}$, trouver des $(a_j)_j$ « proches » des droites passant par a_{i_0} et parallèles aux axes. Ceci nous permet de conclure sur le fait que le déterminant de la matrice $[a_{j,k} - a_{i_0,k}]_{1\leq j,k\leq n}$ est non nul et donc sur le fait que les $(P_i)_{i\geq 1}$ sont bien des générateurs de $\mathbb{R}[X]$. Maintenant, on normalise les polynômes P_i sur K en posant :

$$\begin{cases} \hat{P}_i = P_i/||P_i||_{K,\infty} & \text{si} \qquad ||P_i||_{K,\infty} > 0 \\ \hat{P}_i = P_i & \text{si non.} \end{cases}$$

Il faut enfin remarquer que l'égalité suivante est satisfaite :

$$K = \bigcap_{i\geq 1} \hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}^+). \tag{1.1.4}$$

Soit $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ une multi-suite de nombres réels. De manière classique, on peut associer à $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ une forme linéaire L_γ sur l'espace des polynômes en posant :

$$L_\gamma(t^\alpha) = \gamma_\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{1.1.5}$$

Une première remarque triviale est que si γ est une multi-suite de moments sur K, on aura $L_\gamma(p) \geq 0$ pour tout p dans $\mathcal{P}_+(K)$ et $L_\gamma(1) > 0$. En effet, dans ce cas, il existe une mesure positive μ à support inclus dans K telle que l'on ait :

$$L_\gamma(p) = \int_K p(t)d\mu(t) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_+(K). \tag{1.1.6}$$

Etant donné un compact arbitraire K, par le lemme précédent, il existe une suite de polynômes $(P_i)_{i\geq 0}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que l'on puisse écrire K sous la forme $\cap_{i\geq 0}\hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$. Ces polynômes sont déterminés par K. On définit alors « *l'ensemble test* » $\mathcal{T}$ suivant :

$$\mathcal{T} = \Big\{ \prod_{i\in I, I \text{ fini}} \hat{P}_i^{\alpha_i}(t)[1 - \hat{P}_i(t)]^{\beta_i}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0 \Big\} \subset \mathcal{P}_+(K). \tag{1.1.7}$$

Il est clair que si une suite admet une mesure de représentation μ, sa forme linéaire associée sera positive sur $\mathcal{T}$ (voir (1.1.6)). Le but de cette partie est de montrer que cette condition est également suffisante pour l'existence d'une mesure de représentation à support dans le compact K donné.

1.1.3 Définition : Soit $\pi(\mathcal{P})$ l'ensemble des formes linéaires définies sur l'espace des polynômes, qui valent 1 en 1 et qui sont positives sur l'ensemble test $\mathcal{T}$. De manière évidente, l'ensemble $\pi(\mathcal{P})$ est convexe. Nous commencerons par un équivalent au lemme 2.5 de [Vas2] (voir également le lemme 2 de [Cas2]).

1.1.4 Lemme : *Pour toute forme linéaire $L \in \pi(\mathcal{P})$ et pour tout polynôme p dans l'ensemble test $\mathcal{T}$, on a la double inégalité suivante :*

$$0 \leq L(p) \leq 1.$$

Démonstration.
Soit p un polynôme dans l'ensemble test $\mathcal{T}$. On peut écrire $p = p_1 \cdots p_l$ ($l \in \mathbb{Z}^+$) où chaque p_i est de la forme $\hat{P}_i$ ou $1 - \hat{P}_i$. On peut alors utiliser la formule suivante :

$$1 - p = (1 - p_1) + p_1(1 - p_2) + \cdots + p_1 \cdots p_{l-1}(1 - p_l). \tag{1.1.8}$$

Donc, le polynôme $1 - p$ est dans le cône positif engendré par $\mathcal{T}$. Nous obtenons alors que $L(1 - p) \geq 0$, ce qui implique que $L(p) \leq 1$. Comme l'autre inégalité est évidente, ceci achève la démonstration. ∎

Soit $\mathcal{C}_+$ le cône positif engendré par les éléments de $\mathcal{T}$. Du lemme précédent, on peut déduire plusieurs propriétés. Premièrement, si p est dans l'*ensemble test*, $1 - p$ appartient à $\mathcal{C}_+$ et donc aussi $(1 - p)q$ pour tout $q \in \mathcal{T}$. En particulier, toute forme ϕ, positive sur l'ensemble test $\mathcal{T}$, est positive sur le cône $\mathcal{C}_+$ également et donc :

$$\phi((1 - p)q) \geq 0, \quad \forall (p, q) \in \mathcal{T}^2. \tag{1.1.9}$$

Enfin, si on a $\phi(1) = 0$, la forme est identiquement nulle. En effet si $p \in \mathcal{T}$, on a $\phi(p) \geq 0$ mais aussi $\phi(1 - p) = \phi(1) - \phi(p) \geq 0$; ceci entraîne l'égalité :

$$\phi(p) = 0, \quad \forall p \in \mathcal{T}. \tag{1.1.10}$$

Puis on conclut sur la nullité de ϕ grâce au fait que $\mathcal{T}$ engendre $\mathbb{R}[X]$ en tant qu'espace vectoriel.

De plus, grâce au précédent lemme 1.1.4, on peut identifier $\pi(\mathcal{P})$ avec un sous-ensemble de $[0; 1]^{\mathcal{T}}$ qui est compact d'après un théorème classique de Tychonoff. Ceci est possible car l'algèbre engendrée par les éléments de $(\hat{P}_i)_{i \geq 0}$ dans $\mathbb{R}[X]$ est $\mathbb{R}[X]$ tout entier. De plus, ce sous-ensemble de $[0; 1]^{\mathcal{T}}$ est fermé : soit L_0 un point de la fermeture de $\pi(\mathcal{P})$, par passage à la limite, on a $L_0(p) \geq 0$ pour tout $p \in \mathcal{T}$ et $L_0(1) = 1$. De plus, L_0 peut s'étendre par linéarité à $\mathbb{R}[X]$ tout entier. Donc $\pi(\mathcal{P})$ est un compact convexe. De la même manière que dans le lemme 3 de [Cas2] et dans le lemme 2.7 de [Vas2], on peut également montrer que toute forme extrémale de $\pi(\mathcal{P})$ est une forme linéaire multiplicative.

Je tiens, ici, à remercier le Professeur V. Müller dont les remarques m'ont permis de donner une démonstration plus limpides du corollaire 1.1.5 suivant.

1.1.5 Corollaire : *Soit L une forme linéaire extrémale de $\pi(\mathcal{P})$. Alors L est multiplicative sur $\mathbb{R}[X]$.*

Démonstration.
Soit p un polynôme fixé dans l'ensemble test $\mathcal{T}$. Il suffit de prouver que l'égalité $L(pq) = L(p)L(q)$ est valable pour tout élément $q \in \mathcal{T}$. En effet, l'algèbre des polynômes est engendrée par les éléments de $\mathcal{T}$. On pose $\varepsilon = L(p)$. On sait par le lemme 1.1.4 que ε est dans $[0; 1]$. On découpe la démonstration en trois parties suivant les valeurs possibles de ε.

$\underline{\varepsilon = 0}$: on définit la forme linéaire L_0 par $L_0(q) = L(pq)$ pour tout $q \in \mathcal{T}$; puis on la prolonge par linéarité sur $\mathbb{R}[X]$ tout entier. Bien évidemment, cette forme est positive sur $\mathcal{T}$ et elle vérifie $L_0(1) = 0$. Par la remarque précédente (voir (1.1.10)), on en déduit que L_0 est la forme identiquement nulle. Donc, on a :

$$L(pq) = 0 = L(p)L(q), \quad \forall q \in \mathcal{T}. \tag{1.1.11}$$

$\underline{\varepsilon = 1}$: on utilise le cas précédent. En effet, on définit une forme L_0 par $L_0(q) = L((1-p)q)$, pour tout élément $q \in \mathcal{T}$. Puis on prolonge par continuité L_0 à $\mathbb{R}[X]$ tout entier. On a alors $L_0(1) = L(1) - L(p) = 1 - 1 = 0$ et L_0 est positive sur l'ensemble $\mathcal{T}$ (grâce à (1.1.9)). Donc par la même remarque que pour le cas d'avant, on obtient que la forme L_0 est identiquement nulle. Ceci entraîne que $L((1-p)q) = 0$ ou ce qui revient à dire que :

$$L(pq) = L(q) = L(p)L(q), \quad \forall q \in \mathcal{T}. \tag{1.1.12}$$

$\underline{0 < \varepsilon < 1}$: on définit deux formes linéaires L_1 et L_2 sur l'espace des polynômes en posant :

$$L_1(q) = \frac{1}{\varepsilon} L(pq) \text{ et } L_2(q) = \frac{1}{1-\varepsilon} L((1-p)q), \quad \forall q \in \mathcal{T}. \tag{1.1.13}$$

Il est très rapide de voir (via (1.1.9)) que ces deux formes sont dans $\pi(\mathcal{P})$ (et ne sont donc pas identiquement nulles puisque $L_1(1) = L_2(1) = 1$). De plus, on peut remarquer que l'on a l'égalité :

$$L = \varepsilon L_1 + (1-\varepsilon) L_2.$$

De plus, par notre hypothèse d'extrémalité, on en déduit que $L_1 = L_2$. Il suffit à présent de traduire cette égalité :

$$L_1(q) = \frac{1}{L(p)} L(pq) = L_2(q) = \frac{1}{1-L(p)} L((1-p)q), \quad \forall q \in \mathcal{T}.$$

En mettant tout au même dénominateur, on obtient :

$$L(pq) - L(p)L(pq) = L(p)L(q) - L(p)L(pq), \quad \forall q \in \mathcal{T},$$

ce qui est bien l'égalité :

$$L(pq) = L(p)L(q), \quad \forall q \in \mathcal{T}.$$

Comme ceci est vrai pour tout p dans l'ensemble test, la multiplicativité est vraie pour tout couple dans $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$. Puis on obtient la même propriété sur $\mathbb{R}[X]$ puisque tout polynôme est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{T}$. ■

Ce corollaire 1.1.5 nous permet de donner une représentation intégrale pour les formes linéaires de $\pi(\mathcal{P})$. Il suffit de suivre les démonstrations données dans [Cas2] et [Vas2].

1.1.6 Proposition : *Soit L une forme linéaire incluse dans $\pi(\mathcal{P})$. Alors, il existe une unique mesure positive μ à support dans K telle que l'on ait :*

$$L(q) = \int_K q(t)d\mu(t), \ \textit{pour tout } q \in \mathcal{P}(K). \tag{1.1.14}$$

Démonstration.
Soit $L_0 \in \pi(\mathcal{P})$ une forme extrémale ; L_0 est multiplicative sur $\mathcal{P}(K)$ par le corollaire 1.1.5 et si l'on pose $c_j = L_0(t_j)$, on obtient l'égalité $L_0(q) = q(c)$, où $c = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Comme $L_0(q) \in [0, 1]$ pour tout $q \in \mathcal{T}$, on a, en particulier, $L_0(\hat{P}_i) = \hat{P}_i(c) \geq 0$ (en utilisant la multiplicativité de la forme L_0). On peut donc affirmer que $c \in \cap_{i\geq 0}\hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}^+) = K$. Donc, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|L_0(q)| = |q(c)| \leq ||q||_{\infty,K}, \ \forall q \in \mathcal{P}(K). \tag{1.1.15}$$

Si $L \in \pi(\mathcal{P})$ est de la forme $\sum_{j\in J} \lambda_j L_j$ où les L_j sont des formes extrémales de $\pi(\mathcal{P})$, où l'ensemble J est fini et où les nombres $(\lambda_j)_{j\in J}$ vérifient $0 \leq \lambda_j \leq 1$ et $\sum_{j\in J} \lambda_j = 1$, on a la majoration suivante :

$$|L(q)| \leq \sum_{j\in J} \lambda_j |L_j(q)| \leq \sum_{j\in J} \lambda_j ||q||_{\infty,K} = ||q||_{\infty,K}, \ \forall q \in \mathcal{P}(K). \tag{1.1.16}$$

Comme $\pi(\mathcal{P})$ est un ensemble compact convexe, on peut donc lui appliquer le théorème de Krein-Milman. Par conséquent, toute forme linéaire $L \in \pi(\mathcal{P})$ est dans l'adhérence de l'ensemble convexe engendré par les points extrémaux. Dans notre cas, cela entraîne :

$$|L(q)| \leq ||q||_{\infty,K}, \ \forall L \in \pi(P), \ \forall q \in \mathcal{P}(K). \tag{1.1.17}$$

Grâce au fait que $\mathcal{T}$ engendre $\mathcal{P}(K)$ qui lui même est dense dans l'ensemble des fonctions continues par le théorème de Weierstrass, l'inégalité est en fait vraie pour toute fonction continue sur K. Enfin, par le théorème de représentation de Riesz, nous obtenons l'existence et l'unicité de la mesure μ positive telle que l'on ait :

$$L(q) = \int_K q(t)d\mu(t), \ \forall q \in \mathcal{P}(K). \tag{1.1.18}$$

■

1.1.7 Théorème : *Soit $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ ($\gamma_0 > 0$) une multi-suite de nombres réels et soit K un compact arbitraire. Alors γ est une multi-suite de moments pour une mesure positive μ, unique et à support dans K, si et seulement si la forme linéaire associée L_γ est positive sur l'ensemble $\mathcal{T}$.*

Démonstration.
Le fait que la condition de positivité soit nécessaire est évident. Inversement, on pose $L = \frac{1}{\gamma_0} L_\gamma$ qui est dans $\pi(P)$ et on applique la proposition précédente. ■

Dans le théorème précédent, on ne donne comme condition sur le support de la mesure μ que le fait d'être inclus dans le compact K. Pourtant il est quelquefois plus pratique de pouvoir restreindre le support de cette mesure à un ensemble encore plus petit. Comme il est précisé dans [Vas2] pour le cas des compacts semi-algébriques, on peut, par des conditions de positivité supplémentaires, contrôler le support de la mesure de représentation μ.

1.1.8 Corollaire : *Soient K et $\mathcal{T}$ comme dans le théorème* 1.1.7 *et soit* $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ ($\gamma_0 > 0$) *une multi-suite de moments sur K de mesure de représentation μ. S'il existe des polynômes $(r_j)_{j \in J}$ tels que les formes $L_\gamma(r_j *)$ soient positives pour tout $q \in \mathcal{T}$ et pour tout $j \in J$, alors le support de la mesure μ vérifie :*

$$supp(\mu) \subset \{t \in K; r_j(t) \geq 0, \forall j \in J\}. \tag{1.1.19}$$

Démonstration.
C'est la méthode utilisée dans la démonstration de [Vas2] qui s'applique : on suppose premièrement que $L_\gamma(r_j) > 0$. On pose alors $\gamma_{\alpha,j} = L_\gamma(t^\alpha r_j)$, pour tout $\alpha \geq 0$. On a $\gamma_{0,j} = L_\gamma(r_j) > 0$ et $L_{\gamma_j}(p) = L_\gamma(r_j p) \geq 0$ pour tout $p \in \mathcal{T}$. On applique à cette nouvelle suite le théorème 1.1.7, pour obtenir une mesure μ_j vérifiant :

$$L_{\gamma_j}(p) = \int_K p(t)d\mu_j(t) = L_\gamma(r_j p) = \int_K r_j(t)p(t)d\mu(t), \tag{1.1.20}$$

pour tout polynôme p. Par densité de ces derniers, pour toute fonction continue f sur K, on obtient :

$$\int_K f(t)d\mu_j(t) = \int_K f(t)r_j(t)d\mu(t). \tag{1.1.21}$$

Par unicité de la mesure dans le théorème 1.1.7, on en déduit l'égalité $\mu_j = r_j\mu$. Si on pose $A_j = \{t \in K; r_j(t) < 0\}$, si $\mu(A_j)$ était strictement positif, on obtiendrait :

$$\mu_j(A_j) = \int_K \chi_{A_j}(t)d\mu_j(t) = \int_K \chi_{A_j}(t)r_j(t)d\mu(t) < 0, \tag{1.1.22}$$

(où χ_{A_j} est la fonction caractéristique associée à l'ensemble borélien A_j) ce qui est impossible puisque la mesure μ_j est positive.

Maintenant si $L_\gamma(r_j) = 0$, on distingue deux cas : on suppose qu'il existe un $q_j \in \mathcal{T}$ tel que $L_\gamma(r_j q_j) > 0$. Dans ce cas, quite à rajouter une constante C à q_j, on peut supposer que $q_j(t) > 0$, pour tout $t \in K$. En effet, le fait de rajouter une constante C implique :

$$L_\gamma(r_j(C + q_j)) = C\, L_\gamma(r_j) + L_\gamma(r_j q_j) = L_\gamma(r_j q_j) > 0,$$

ce qui ne change pas l'hypothèse faite. On applique alors ce qui vient d'être fait avec q_j en remarquant que $q_j(t)r_j(t) \geq 0$ est équivalent à $r_j(t) \geq 0$. Enfin, si $L_\gamma(r_j q) = 0$ pour tout $q \in \mathcal{T}$, on obtient pour toute fonction f continue sur K :

$$\int_K f(t)r_j(t)d\mu(t) = 0. \tag{1.1.23}$$

Ceci revient à dire que $r_j\mu$ est nulle et donc le support de μ est dans l'ensemble des zéros de r_j, ce qui prouve en particulier notre inclusion. ■

En fait, on peut donner un second corollaire direct du théorème 1.1.7 où l'on peut situer le support de μ dans l'image réciproque des zéros de polynômes en utilisant le dernier cas de la démonstration précédente :

1.1.9 Corollaire : *Soient K et $\mathcal{T}$ comme dans le théorème* 1.1.7 *et soit* $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ $(\gamma_0 > 0)$ *une multi-suite de moments sur K de mesure de représentation μ. S'il existe des polynômes $(r_j)_{j\in J}$ tels que les formes linéaires $L_\gamma(r_j *)$ soient nulles pour tout $q \in \mathcal{T}$ et pour tout $j \in J$, alors le support de la mesure μ vérifie :*

$$supp(\mu) \subset \{t \in K; r_j(t) = 0, \forall j \in J\}. \tag{1.1.24}$$

1.1.10 Remarques :

(1) Évidemment, la construction polynômiale nous donne la solution pour tout compact, mais sur des cas particuliers simples, il est sans doute plus pratique d'utiliser d'autres polynômes, par exemple pour les compacts semi-algébriques. Pour de tels exemples, on peut se référer au travail de F.-H. Vasilescu ([Vas2]) où les cas de la sphère de $\mathbb{R}^n$ et de $[0,1]^n$, en particulier, ont été traités. Le fait d'utiliser des polynômes plus appropriés rend la condition de positivité beaucoup plus simple. Mais dans ce cas, si la famille de polynômes n'engendre pas en tant qu'algèbre $\mathbb{R}[X]$, on peut (et on doit) rajouter des polynômes de degré 1 qui restent positifs sur notre compact K. En effet dans ce cas là, on rajoute à notre famille les éléments suivants :

Soient $a_i(K) = a_i = \inf\{t_i,\, t \in K\}$ et $b_i(K) = b_i = \sup\{t_i,\, t \in K\}$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. On rajoute les fonctions linéaires :

$$\begin{cases} \hat{P}_{0,i}(t) & = \dfrac{t_i - a_i}{b_i - a_i} \text{ si } b_i \neq a_i \\ \\ & = 0 \text{ si non.} \end{cases} \tag{1.1.25}$$

(2) En fait, on peut remarquer que la méthode s'applique pour toute famille dénombrable de polynômes $(Q_i)_{i\geq 0}$ à partir du moment où elle engendre, en tant qu'algèbre, l'espace des polynômes. Il suffit de construire un ensemble test de la même manière que dans (1.1.7). Pour chaque compact, il est alors préférable d'utiliser une famille adéquate, dès que cela est possible. C'est d'ailleurs ce que l'on fait dans l'exemple qui suit.

1.1.11 Etude d'un exemple :

Pour le cas des compacts semi-algébriques, plusieurs exemples sont cités dans [Vas2]. En particulier, l'auteur traite le cas du problème de Hausdorff en dimension n. Afin de ne pas trop compliquer les calculs, nous étudierons un exemple de compact non semi-algébrique dans $\mathbb{R}$. Mais, nous donnerons une méthode pour en obtenir en dimension quelconque. Soit K l'ensemble défini par :

$$K = \{0\} \cup \bigcup_{i\geq 1} \Big[\frac{1}{2i}, \frac{1}{2i-1}\Big]. \tag{1.1.26}$$

Il est évident que K est bien compact. On commence par montrer qu'il n'est pas semi-algébrique. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on écrit $K = \cap_{i=1}^{N} U_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$, où les $(U_i)_{1\leq i\leq N}$ sont des polynômes. Alors pour tout (j,ε) dans $\mathbb{Z}^+ \times \{0;1\}$, il existe un i_0 tel que $U_{i_0}((2j+\varepsilon)^{-1}) = 0$. En effet si ce n'était pas le cas, pour tout i dans $\{1,\cdots,N\}$, $U_i((2j+\varepsilon)^{-1}) > 0$. En utilisant la continuité des $(U_i)_i$, il existerait un $\eta > 0$ tel que

$$\forall i \in \{1,\cdots,N\}, \quad \forall t \in [(2j+\varepsilon)^{-1} - \eta, (2j+\varepsilon)^{-1} + \eta],\ U_i(t) \geq 0. \tag{1.1.27}$$

On aurait donc $B((2j+\varepsilon)^{-1}, \eta) \subset K$, ce qui contredit le fait que $(2j+\varepsilon)^{-1}$ est un point de la frontière de K. Donc tous les nombres du type $1/j$ sont racines d'un nombre fini de polynômes. Il y a donc forcément l'un d'entre eux qui est nul. En le supprimant et en réitérant le procédé, on prouve que tous les polynômes $(U_i)_i$ sont nuls ; ce qui signifierait que $K = \mathbb{R}$. Ceci nous donne bien la contradiction. On pourrait prendre la construction des $(P_i)_{i\geq 0}$ comme dans le lemme 1.1.2, mais il est plus facile de prendre les polynômes suivants pour définir le compact K (voir la remarque précédente 1.1.10) :

$$\begin{cases} P_0(t) = t(1-t) \\ P_j(t) = (t - \dfrac{1}{2j+1})(t - \dfrac{1}{2j}), \forall j \geq 1. \end{cases} \tag{1.1.28}$$

Alors, pour définir l'ensemble « test », on a besoin des polynômes suivants (qui s'obtiennent par un simple calcul) :

$$\begin{cases} \hat{P}_0(t) = 4t(1-t) \\[2ex] 1 - \hat{P}_0(t) = (1-2t)^2 \\[2ex] \hat{P}_j(t) = \dfrac{2j+1}{2j-1}(t - \dfrac{1}{2j+1})(t - \dfrac{1}{2j}), \forall j \geq 1 \\[2ex] 1 - \hat{P}_j(t) = \dfrac{2j+1}{2j-1}(1-t)(t + \dfrac{4j^2-2j-1}{2j(2j+1)}), \forall j \geq 1 \end{cases} \tag{1.1.29}$$

On peut vérifier, par exemple, qu'il n'existe pas de mesure positive de représentation à support dans K pour toute suite commençant par $(1,1,2,\cdots)$ puisque l'on a :

$$L_{(1,1,2,\cdots)}(1 - \hat{P}_2) = \frac{-10}{3} < 0.$$

Enfin, ce qui a été fait dans le cas d'une seule variable peut être généralisé : il suffirait de prendre l'origine et des boules fermées de rayons de plus en plus petits telles qu'il existe une droite passant par l'origine qui coupe une infinité de ces boules (afin d'être sûr d'avoir un compact qui ne soit pas semi-algébrique).

1.1.12 Remarque : Nous nous sommes occupés ici du problème des moments sur un compact de $\mathbb{R}^n$. On aurait pu résoudre le même problème dans $\mathbb{C}^n$. Pour voir les liens qui existent entre les deux problèmes des moments, on peut se référer à une note de Mihail Putinar (voir [Pu]) ainsi qu'à un appendice de J. Stochel et F.H. Szafraniec (voir [St-Sz5] de la page 485 à la fin) sur la complexification du problème des moments.

Partie I.2 Problème sur un ensemble semi-algébrique non-borné

Une réponse au problème des moments en plusieurs variables sur des ensembles non bornés a été donnée récemment par Mihail Putinar et Florian-H. Vasilescu, dans un article paru dans *Annals of Mathematics* en 1999. L'idée utilisée (qui apparaît déjà dans une publication du second auteur cité où les problèmes de Hamburger et de Stieltjes en plusieurs variables sont traités, voir [Vas3]) est de plonger l'algèbre des polynômes dans une algèbre de fractions rationnelles. Les fractions utilisées sont celles incluses dans l'ensemble des fonctions du type :

$$\frac{x^\alpha}{(1+||x||^2)^m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

où $||*||$ est la norme euclidienne classique de $\mathbb{R}^n$. On peut remarquer que l'idée d'utiliser des fractions pour l'étude du problème des moments multi-dimensionnels apparaît déjà dans une note parue en 1991 pour donner une réponse au problème tronqué (voir [Gi-Se]).

Dans cette section, nous transcrirons les résultats obtenus par M. Putinar et F.-H. Vasilescu pour le cas d'autres algèbres de fractions rationnelles. L'intérêt de ce type de généralisation sera de pouvoir utiliser les résultats ainsi obtenus pour donner des critères de sous-normalité pour des multi-opérateurs non bornés (voir en particulier la troisième partie de cette thèse).

Soit $(p_1, \cdots, p_m) \in \mathbb{R}[X]^m$ un m-uplet de polynômes en n variables tel que chacun d'entre eux reste strictement positif sur $\mathbb{R}^n$. On notera par $(\theta_1, \cdots, \theta_m)$ les fonctions inverses des p_j pour tout $j = 1, \cdots, m$. Enfin, soit $\mathcal{R}_\theta$ l'algèbre engendrée par les $(\theta_j)_j$ et les éléments de $\mathbb{R}[X]$. Dans cette section, à chaque fois que l'on aura des $(n+m)$-uplets α dans $\mathbb{R}^{n+m}$, on les écrira (α', α'') avec α' dans $\mathbb{R}^n$ et α'' dans $\mathbb{R}^m$. Dans tout ce qui suit, on notera par $\mathcal{S}^2$ l'ensemble des polynômes qui peuvent s'écrire comme une somme de carrés de polynômes. Comme on travaillera sur des polynômes avec des nombres différents de variables, afin de simplifier la lecture, nous noterons par $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes en p variables. Enfin, on note par θ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ donnée par :

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \cdots, \theta_m(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

1.2.1 Lemme : *Soit Ψ l'application de $\mathbb{R}_{n+m}[t,s]$ dans $\mathcal{R}_\theta$ définie par $\Psi(q(t,s)) = q(t,\theta(t))$ pour tout polynôme $q \in \mathbb{R}_{n+m}[t,s]$. Alors, Ψ est surjective et son noyau est un idéal $\mathcal{I}_\omega$ engendré par les fonctions suivantes :*

$$\omega_j(t,s) = s_j p_j(t) - 1, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{1.2.1}$$

Démonstration.
Soit $r(t,s)$ un élément du noyau $Ker(\Psi)$ de Ψ. Alors, on a :

$$\begin{aligned} r(t,s) &= r(t,s) - r(t,\theta(t)) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^m \setminus \{0\}} p_\beta(t)(s^\beta - \theta(t)^\beta) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (s_j - \theta_j(t)) r_j(t,s,\theta(t)), \end{aligned}$$

où les r_j sont des polynômes de $\mathbb{R}_{2m+n}[X]$. On pose alors par α_k le maximum de l'ensemble $\{\beta_k / p_\beta \neq 0\}$ et on définit le polynôme τ par :

$$\tau(t) = \prod_{j=1}^{n} p_j(t)^{\alpha_j}.$$

Dans ce cas, on a de manière claire :

$$\tau(t) r(t,s) = \sum_{j=1}^{m} (s_j p_j(t) - 1) r_j^{(1)}(t,s). \tag{1.2.2}$$

Si pour tout j, α_j est nul, $r(t,s)$ ne dépend plus que de la variable t et comme $r(t,\theta(t)) = 0$, il s'ensuit que r est le polynôme identiquement nul. Sinon, il existe un entier k_0 tel que $\alpha_{k_0} \neq 0$. Alors, τ et ω_{k_0} n'ont pas de zéro en commun, on peut donc trouver des polynômes $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\omega}_{k_0}$ tels que :

$$\tau\tilde{\tau} + \omega_{k_0}\tilde{\omega}_{k_0} = 1.$$

Ceci revient à écrire que, dans tous les cas, on peut trouver des polynômes $(\tilde{\omega}_j)_{j=1,\cdots,m}$ tels que l'on ait :

$$\tau\tilde{\tau} + \sum_{j=1}^{m} \omega_j \tilde{\omega}_j = 1. \tag{1.2.3}$$

Et donc, nous obtenons que r admet la représentaion $r\tau\tilde{\tau} + \sum_{j=1,\cdots,m} r\omega_j\tilde{\omega}_j$; ceci est équivalent à écrire, en utilisant (1.2.2) :

$$r = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \left[r\tilde{\omega}_j + r_j^{(1)}\tilde{\tau} \right]. \tag{1.2.4}$$

Inversement si $r \in \mathcal{I}_\omega$, r s'écrit sous la forme $\sum_{j=1}^{m} r_j\omega_j$ et on obtient :

$$r(t,\theta(t)) = \sum_{j=1}^{m} r_j(t,\theta(t)) \Big[p_j(t)\theta_j(t) - 1 \Big] = 0. \tag{1.2.5}$$

Donc, on a bien l'égalité $Ker(\Psi) = \mathcal{I}_\omega$. Comme la surjectivité est évidente, on obtient bien l'égalité voulue. ∎

1.2.2 Notation : Dans tout ce qui suit, nous utiliserons un m-uplet $(p_1, \cdots, p_m)$ de polynômes de $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}_n[X]$ de la forme :

$$p_j(t) = 1 + \sum_{k \in I_j} t_k^2 + \sum_{l \in L_j} r_{j,l}(t)^2, \tag{1.2.6}$$

où l'ensemble I_j est inclus dans $\{1, \cdots, n\}$, ceci pour tout $j = 1, \cdots, m$ et où les $(r_{j,l})_{j,l}$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$. Jusqu'à la fin de cette partie, on notera les p_j $(j = 1, \cdots, m)$ sous la forme :

$$p_j(t) = \sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} a_{j,K} t^K,$$

où les familles $(a_{j,K})_K$ sont finies. Enfin, on notera par $(\theta_j)_j$ les fonctions inverses des $(p_j)_j$ pour $j = 1, \cdots, m$. Soit $\mathcal{R}_\theta$ l'algèbre engendrée par les fonctions $(\theta_j)_j$ et les éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. On dira que les ensembles (I_j) $(j = 1, \cdots, m)$ vérifient la condition (1.2.7) si on a l'égalité :

$$\bigcup_{j=1}^{m} I_j = \{1, \cdots, n\}. \tag{1.2.7}$$

Nous commencerons par rappeler deux lemmes clés, dont nous aurons besoin, sur des opérateurs symétriques qui possèdent des fermetures canoniques auto-adjointes (*cf.* [Nel] et [Pu-Vas2]). Le lemme suivant correspond au lemme 2.2 de [Pu-Vas2].

1.2.3 Lemme (Putinar-Vasilescu 1999) : *Soit $\mathcal{H}$ un espace de* HILBERT *séparable. Soit A un opérateur positif dont le domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et tel que l'on ait $A(\mathcal{D}(A)) \subset \mathcal{D}(A)$. Supposons, de plus, que $I + A$ soit une bijection sur $\mathcal{D}(A)$. Alors la fermeture canonique $\bar{A}$ de A est un opérateur auto-adjoint.*

Le lemme suivant correspond à la proposition 2.1 de [Pu-Vas2] (lemme qui généralise des résultats de [Nel]).

1.2.4 Lemme (Putinar-Vasilescu 1999) : *Soient $T_1, \cdots, T_m$ des opérateurs symétriques définis sur un espace de* HILBERT *séparable $\mathcal{H}$. Supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}$ dense contenu dans $\cap_{j,k=1}^m \mathcal{D}(T_j T_k)$ tel que les restrictions des opérateurs $T_1, \cdots, T_m$ à cet espace commutent. Supposons de plus que l'opérateur $(T_1^2 + \cdots + T_m^2)|\mathcal{D}$ soit essentiellement auto-adjoint, alors il en est de même de chaque T_j et leurs fermetures canoniques respectives $\overline{T_1}, \cdots, \overline{T_m}$ commutent.*

Avant de poursuivre, on va rappeler une transformation due à GELFAND et NAIMARK sur des formes semi-définies positives (voir [Ge-Na], [Fu2], [Vas3], [Pu-Vas2], etc).

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, sur $\mathbb{C}$, de fonctions à valeurs complexes définies sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1 \in \mathcal{A}, \\ \text{Si } f \in \mathcal{A}, \text{ alors } \bar{f} \in \mathcal{A}. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Soit λ une forme linéaire semi-définie positive sur $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$, c'est à dire qu'elle vérifie :

$$\lambda(f\bar{f}) \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{A}. \tag{1.2.9}$$

Si la forme λ n'est pas identiquement nulle, on a nécessairement $\lambda(1) > 0$ et on peut associer à la paire $(\mathcal{A}, \lambda)$ un espace préhilbertien. Pour ce faire, il suffit de poser :

$$\mathcal{N} = \Big\{ f \in \mathcal{A} \quad / \quad \lambda(f\bar{f}) = 0 \Big\}. \tag{1.2.10}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathcal{N}$ est un idéal bilatère. Par conséquent, on peut définir le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ qui est un $\mathcal{A}$-module. En fait, on peut attacher à ce quotient $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ un produit scalaire en posant :

$$\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle_\lambda = \lambda(f\bar{g}), \quad \forall (f, g) \in \mathcal{A}^2. \tag{1.2.11}$$

Pour plus de détails, on peut se référer [Du-Schw], [Fu2], etc.

1.2.5 Théorème : *Soit $(p_1, \cdots, p_m)$ un m-uplet de polynômes de $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}_n[X]$ sans aucun zéro dans $\mathbb{R}^n$ de la forme*

$$p_j(t) = 1 + \sum_{k \in I_j} t_k^2 + \sum_{l \in L_j} r_{j,l}(t)^2,$$

où les ensembles $(I_j)_{j=1,\cdots,m}$ vérifient la condition (1.2.7). *Soit ϕ une forme linéaire positive semi-définie sur $\mathcal{R}_\theta$ telle que les formes $\{\phi(r_{j,l} *)\}_{(j,l) \in \{1,\cdots,m\} \times L_j}$ le soient également. Alors ϕ admet une unique mesure positive de représentation μ, dont le support est inclus dans $\cap_{(j,l) \in \{1,\cdots,m\} \times L_j} r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$. Bien évidemment, la réciproque est également vraie.*

Nous suivons la méthode du théorème 2.5 de [Pu-Vas2]. Nous répétons tous les détails de la preuve car les variantes utilisées ici par rapport à la démonstration du théorème de M. Putinar et F.-H. Vasilescu seront utilisées à plusieurs reprises dans les chapitres suivants. Dans la remarque qui suit, on donne une preuve beaucoup plus courte et astucieuse qui a été donnée par E. Albrecht.

Démonstration.
On va utiliser la transformation de Gelfand et Naimark. On définit une forme sesquilinéaire sur l'algèbre $\mathcal{R}_\theta$ en posant :

$$\langle r_1, r_2 \rangle_\phi = \phi(r_1 \bar{r}_2). \tag{1.2.12}$$

On pose ensuite $\mathcal{N} = \{r \in \mathcal{R}_\theta \,/\, \phi(r\bar{r}) = 0\}$. On obtient un produit scalaire sur $\mathcal{R}_\theta/\mathcal{N}$ et on complète ce dernier ensemble pour obtenir un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\phi$ qui dépend de notre forme linéaire ϕ. On définit alors les opérateurs $(A_{j,l})_{j,l}$ et T_j sur $\mathcal{R}_\theta/\mathcal{N}$ correspondant à la multiplication par les polynômes $r_{j,l}$ et t_j respectivement, c'est à dire que :

$$\begin{cases} A_{j,l}(q + \mathcal{N}) = r_{j,l} q + \mathcal{N}, & \forall q + \mathcal{N} \in \mathcal{R}_\theta/\mathcal{N} = \mathcal{D}(A_{j,l}) \\ \\ T_j(q + \mathcal{N}) = t_j q + \mathcal{N}, & \forall q + \mathcal{N} \in \mathcal{R}_\theta/\mathcal{N} = \mathcal{D}(T_j). \end{cases} \tag{1.2.13}$$

Les opérateurs sont bien définis car $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{R}_\theta$-module. Le domaine commun $\mathcal{D}(A_{j,l}) = \mathcal{R}_\theta/\mathcal{N}$ des opérateurs $A_{j,l}$ est donc dense dans $\mathcal{H}_\phi$ par construction (de même pour les T_j). De plus, les opérateurs $(A_{j,l}, T_k)_{j,k,l}$ forment une famille commutative d'opérateurs symétriques du fait que les variables utilisées soient réelles :

$$\langle A_{j,l}(g+\mathcal{N}), q+\mathcal{N}\rangle_\phi = \phi(r_{j,l}g\overline{q}) = \langle g+\mathcal{N}, A_{j,l}(q+\mathcal{N})\rangle_\phi, \tag{1.2.14}$$

pour tout couple $(g+\mathcal{N}, q+\mathcal{N})$ dans $(\mathcal{R}_\theta/\mathcal{N})^2$ (c'est exactement la même égalité qui s'applique pour les opérateurs T_j). On définit maintenant les opérateurs $(U_j)_{j=1,\cdots,m}$ en posant :

$$U_j = \sum_{l\in L_j} A_{j,l}^2 + \sum_{k\in I_j} T_j^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}(U_j) = \mathcal{R}_\theta/\mathcal{N}, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{1.2.15}$$

Ces opérateurs sont positifs à domaine commun dense. On peut observer que chaque opérateur $I + U_j$ est bijectif sur $\mathcal{D}(U_j) = \mathcal{R}_\theta/\mathcal{N}$ (vu les dénominateurs que l'on a pris pour nos fractions rationnelles). En effet, pour tout élément p de $\mathcal{R}_\theta$, il existe un $p'(t) = \theta_j(t)p(t)$ de $\mathcal{R}_\theta$ tel que l'on ait :

$$[I + U_j](p') = [1 + \sum_{k\in I_j} t_k^2 + \sum_{l\in L_j} r_{j,l}^2]p'(t) = p_j(t)\theta_j(t)p(t) = p(t). \tag{1.2.16}$$

On ne peut pas alors appliquer directement les résultats de M. Putinar et F.-H. Vasilescu car nous n'obtiendrions pas la commutativité des fermetures canoniques. Mais, on peut appliquer le lemme 1.2.3 à chaque $[I+U_j][I+U_i]-I$. On en déduit que chaque opérateur $[I + U_j][I + U_i] - I$ est essentiellement auto-adjoint pour toutes les valeurs de i et j dans $\{1, \cdots, m\}^2$ où la composition des opérateurs peut s'écrire sous la somme :

(1.2.17)

$$\begin{aligned}\Big[I + U_j\Big]\Big[I + U_i\Big] - I = & \sum_{k\in I_i\cup I_j} T_k^2 + \sum_{l\in L_i} A_{i,l}^2 + \sum_{l\in L_j} A_{j,l}^2 + \sum_{k\in I_i, l\in I_j} T_k^2 T_l^2 \\ & + \sum_{k\in L_i, l\in L_j} A_{i,l}^2 A_{j,k}^2 + \sum_{k\in I_i, l\in L_j} T_k^2 A_{j,l}^2 + \sum_{k\in I_j, l\in L_i} T_k^2 A_{i,l}^2.\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le lemme 1.2.4 à chaque $[I + U_j][I + U_i] - I$. En appliquant le procédé à chaque couple (i, j) dans $\{1, \cdots, m\}^2$, on en déduit que les opérateurs $(A_{j,l})_{j,l}$ et $(T_k)_k$ ont des fermetures canoniques auto-adjointes respectives $(\overline{A_{j,l}})_{j,l}$ et $(\overline{T_k})_k$, et que ces fermetures canoniques commutent. Soit E la mesure spectrale jointe de cette famille commutative d'opérateurs auto-adjoints $(\overline{A_{j,l}}, \overline{T_k})_{j,k,l}$. On définit alors la mesure positive μ en posant :

$$\mu(*) = \langle E(*)(\mathbf{1} + \mathcal{N}), (\mathbf{1} + \mathcal{N})\rangle_\phi.$$

Comme les ensembles $(I_1, \cdots, I_m)$ vérifient la condition (1.2.7), on peut trouver $j_1, \cdots, j_n$ vérifiant $i \in I_{j_i}$. Alors, on obtient maintenant :

$$\begin{aligned}\phi(t^\alpha) &= \phi(t_1^{\alpha_1}\cdots t_n^{\alpha_n}) = \langle T_1^{\alpha_1}\cdots T_n^{\alpha_n}\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle_\phi = \langle \overline{T_1}^{\alpha_1}\cdots \overline{T_n}^{\alpha_n}\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle_\phi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} t_1^{\alpha_1}\cdots t_n^{\alpha_n} d\langle E(t)(\mathbf{1}+\mathcal{N}),(\mathbf{1}+\mathcal{N})\rangle_\phi = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu(t).\end{aligned}$$

Cette égalité est en fait valable sur l'algèbre $\mathcal{R}_\theta$ tout entière. En effet, quel que soit l'élément $r \in \mathcal{R}_\theta/\mathcal{N}$, on a $r(A_{j,l},T_k) \subset r(\overline{A_{j,l}},\overline{T_k})$ où les opérateurs $r(\overline{A_{j,l}},\overline{T_k})$ sont donnés par le calcul fonctionnel du multi-opérateur auto-adjoint commutatif $(\overline{A_{j,l}},\overline{T_k})_{j,k,l}$: si r est un polynôme, cela est évident. Sinon, soit $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$, on a l'inclusion $\theta^{-\beta}(A_{j,l},T_k) \subset \theta^{-\beta}(\overline{A_{j,l}},\overline{T_k})$; ce qui nous donne :

$$\theta^\beta(\overline{A_{j,l}},\overline{T_k})[\theta^{-\beta}(A_{j,l},T_k) - \theta^{-\beta}(\overline{A_{j,l}},\overline{T_k})] = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{R}_\theta/\mathcal{N}. \tag{1.2.18}$$

Ceci entraîne bien que $\theta^\beta(A_{j,l},T_k) \subset \theta^\beta(\overline{A_{j,l}},\overline{T_k})$.

Pour l'unicité de la mesure, on utilise la même démonstration que celle utilisée dans le théorème 2.5 de [Pu-Vas2]. Soit ρ une quelconque mesure de représentation de ϕ. Comme pour tout couple $(p,q) \in \mathcal{R}_\theta^2$, on a :

$$\phi(p\bar{q}) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t)\bar{q}(t)d\rho(t). \tag{1.2.19}$$

On peut identifier $\mathcal{H}_\phi$ avec un sous-espace fermé de $\mathcal{L}^2(\rho)$. Dans ce cas, toute fonction de l'idéal $\mathcal{N}$ est nulle ρ-presque partout et on obtient les inclusions suivantes :

$$\mathcal{R}_\theta \subset \overline{\mathcal{R}}_\theta = \mathcal{H}_\phi \subset \mathcal{L}^2(\rho). \tag{1.2.20}$$

Soient $R_{j,l}$ et S_j les opérateurs multiplications par $r_{j,l}$ et t_j respectivement dans l'espace $\mathcal{L}^2(\rho)$. Leurs domaines $\mathcal{D}(R_{j,l})$ et $\mathcal{D}(S_j)$ sont denses car ils contiennent en particulier l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et à support compact) qui est dense dans $\mathcal{L}^2(\rho)$. De plus, puisque les polynômes $r_{j,l}$ sont à coefficients réels tout comme les variables $t_1,\cdots,t_n$, on obtient que ces opérateurs sont auto-adjoints dans $\mathcal{L}^2(\rho)$. En particulier, on connaît les inclusions $A_{j,l} \subset \overline{A_{j,l}} \subset R_{j,l}$ et $T_j \subset \overline{T_j} \subset S_j$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^*$, les opérateurs $[\overline{A_{j,l}} + ivI]$, $[R_{j,l}+ivI]$, $[\overline{T_j}+ivI]$ et $[S_j+ivI]$ sont inversibles car $\overline{A_{j,l}}$, $\overline{T_j}$, S_j et $R_{j,l}$ sont auto-adjoints. Sur le domaine $\mathcal{D}(\overline{A_{j,l}})$, on a :

$$(R_{j,l}+ivI)^{-1}[(R_{j,l}+ivI) - (\overline{A_{j,l}}+ivI)] = 0.$$

Ceci entraîne que $(R_{j,l}+ivI)^{-1}$ envoie $\mathcal{D}(\overline{A_{j,l}})$ dans lui-même (et $\mathcal{H}_\phi$ dans $\mathcal{H}_\phi$ par continuité, bien sûr on a la même relation entre $\overline{T_j}$ et S_j). De plus, on sait :

$$\begin{cases} ((R_{j,l}+ivI)^{-1})^* = ((R_{j,l}+ivI)^*)^{-1} = (R_{j,l}-ivI)^{-1}.\\ ((S_j+ivI)^{-1})^* = ((S_j+ivI)^*)^{-1} = (S_j-ivI)^{-1}.\end{cases}$$

Si le couple (f,g) est dans $\mathcal{H}_\phi \times \mathcal{H}_\phi^\perp$, on obtient :

$$\begin{cases} \langle [R_{j,l}-ivI]^{-1}g,f\rangle_{\mathcal{L}^2(\rho)} = \langle g,[R_{j,l}+ivI]^{-1}f\rangle_{\mathcal{L}^2(\rho)} = 0,\\ \langle [S_j-ivI]^{-1}g,f\rangle_{\mathcal{L}^2(\rho)} = \langle g,[S_j+ivI]^{-1}f\rangle_{\mathcal{L}^2(\rho)} = 0,\end{cases} \tag{1.2.21}$$

car $\mathcal{H}_\phi$ est stable par les opérateurs $(R_{j,l}+ivI)^{-1}$ et $(S_j+ivI)^{-1}$. On en déduit que $\mathcal{H}_\phi^\perp$ est stable par $(R_{j,l}-ivI)^{-1}$ et $(S_j-ivI)^{-1}$, ce qui revient à dire que $[R_{j,l}+ivI]^{-1}|_{\mathcal{H}_\phi} = [\overline{A_{j,l}}+ivI]^{-1}$ et $[S_j+ivI]^{-1}|_{\mathcal{H}_\phi} = [\overline{T_j}+ivI]^{-1}$. Or ceci nous permet d'affirmer que l'espace $\mathcal{H}_\phi$ est stable par les mesures spectrales $E_{j,l}$ et E_j des opérateurs $R_{j,l}$ et S_j respectivement (voir [Du-Schw], théorème XII.2.10). Soit E_S la mesure spectrale de la famille (S_j). Alors pour tout borélien B de $\mathbb{R}^n$ de la forme $B_1\times\cdots\times B_n$, nous avons :

$$E_S(B) = E_1(B_1)\times\cdots\times E_n(B_n), \tag{1.2.22}$$

ceci nous prouve que $\mathcal{H}_\phi$ est invariant par E_S. Comme en particulier $1\in\mathcal{H}_\phi$, nous avons $\chi_B = E_S(B)1$ qui est dans cet espace, ceci pour tout ensemble borélien de la forme précédente. Mais ces fonctions indicatrices engendrent l'espace $\mathcal{L}^2(\rho)$, on en déduit l'égalité des deux espaces de Hilbert $\mathcal{L}^2(\rho)$ et $\mathcal{H}_\phi$. Et donc, on peut conclure sur l'égalité des opérateurs $\overline{T_j} = S_j$. De plus, pour tout borélien B, nous avons :

$$\mu(B) = \langle E(1),1\rangle_{\mathcal{H}_\phi} = \langle E_S(1),1\rangle_{\mathcal{L}^2(\rho)} = \int \chi_B(t)d\rho(t) = \rho(B). \tag{1.2.23}$$

Ceci prouve bien l'unicité de la mesure.

Nous avons déjà prouvé que les opérateurs $(A_{j,l})_{j,l}$ sont essentiellement auto-adjoints avec la condition de positivité supplémentaire, cela nous permet de conclure sur le lieu du support de la mesure : en effet, pour tout couple (j,l), on a prouvé :

$$\overline{A_{j,l}} = R_{j,l} = r_{j,l}(S_1,\cdots,S_n) = r_{j,l}(\overline{T_1},\cdots,\overline{T_n}).$$

Donc l'opérateur $\overline{A_{j,l}} = r_{j,l}(\overline{T_1},\cdots,\overline{T_n})$ est un opérateur positif. Soit $F_{j,l}$ la mesure spectrale de $r_{j,l}(\overline{R_1},\cdots,\overline{R_n})$, son support est inclus dans $\mathbb{R}^+$. Mais comme nous avons l'égalité suivante :

$$\forall B \text{ borélien de } \mathbb{R},\quad F_{j,l}(B) = E(r_{j,l}^{-1}(B)), \tag{1.2.24}$$

le support de la mesure spectrale jointe E est inclus dans $r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$, ceci pour tout couple (j,l) dans $\{1,\cdots,n\}\times L_j$.

Bien entendu, l'implication inverse est évidente, il suffit d'utiliser la mesure positive de représentation pour avoir la positivité des différentes formes linéaires. ■

Remarque : Preuve rapide donnée par E. Albrecht ; Nous allons ici utiliser directement le théorème 2.5 de [Pu-Vas2]. On a noté $\mathcal{R}_\theta$ l'algèbre engendrée par les fonctions $(\theta_j)_{j=1,\cdots,m}$ et les polynômes $\mathbb{R}_n[X]$, soit $\mathcal{B}$ l'algèbre engendrée par la fraction rationnelle $\theta_1\times\cdots\times\theta_m$ et $\mathbb{R}_n[X]$. On a bien évidemment l'inclusion $\mathcal{B}\subset\mathcal{R}_\theta$. Mais l'inclusion inverse est également vérifiée. En effet, si q est un élément de $\mathcal{R}_\theta$, on peut toujours multiplier les numérateurs et les dénominateurs des fractions qui interviennent dans la décomposition de q par des p_j de telle sorte que chacune des fractions soit dans $\mathcal{B}$. Donc, on a l'égalité :

$$\mathcal{B} = \mathcal{R}_\theta.$$

Comme ϕ est semi-définie positive sur $\mathcal{R}_\theta$, elle l'est sur $\mathcal{B}$. On peut donc appliquer le théorème 2.5 de [Pu-Vas2] à $\mathcal{B}$ où le polynôme P est joué par :

$$P(t) = p_1(t)\times\cdots\times p_m(t).$$

On peut bien lui appliquer ce théorème car P est de la forme :

$$P(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} t_k^2 + \sum_{l \in L_j, j=1,\cdots,m} r_{j,l}(t)^2 + S(t),$$

où S est une somme de carrés de polynômes. ■

Afin de situer au mieux le support de la mesure associée à une suite de moments, nous aurons besoin des polynômes $(r_{j,l})_{j,l}$. Notons les

$$r_{j,l}(t) = \sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} r_{j,l,K}\, t^K, \quad l \in L_j, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{1.2.25}$$

Nous pouvons utiliser le résultat précédent pour donner une solution au problème des moments multi-dimensionnels sur des ensembles non nécessairement bornés.

On rappelle qu'une suite de nombres réels $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ $(\gamma_0 > 0)$ est dite semi-définie positive si la forme linéaire associée est semi-définie positive sur l'algèbre des polynômes à n variables.

1.2.6 Corollaire : *Soit $(p_1, \cdots, p_m)$ un m-uplet de polynômes dans $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}_n[X]$ de la forme :*

$$p_j(t) = 1 + \sum_{k \in I_j} t_k^2 + \sum_{l \in L_j} r_{j,l}(t)^2,$$

où les ensembles $(I_j)_{j=1,\cdots,m}$ vérifient la condition (1.2.7).

Soit $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ $(\gamma_0 > 0)$ une multi-suite de nombres réels. Alors γ est une multi-suite de moments, avec une mesure positive de représentation μ à support inclus dans $\bigcap_{(j,l) \in \{1,\cdots,m\} \times L_j} r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$, si et seulement si il existe une multi-suite $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m}$ semi-définie positive sur $\mathcal{R}_\theta$ vérifiant les trois propositions suivantes :

(i) $\tilde{\gamma}_{\alpha,0} = \gamma_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

(ii) $\displaystyle\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} a_{j,K}\, \tilde{\gamma}_{\alpha+K,\beta+e_j} = \tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^m \quad ; \quad j = 1, \cdots, n.$

(iii) les multi-suites $(\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} r_{j,l,K} \tilde{\gamma}_{\alpha+K,\beta})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m}$ *sont semi-définies positives pour tout couple* $(j, l) \in \{1, \cdots, m\} \times L_j$.

De plus cette mesure positive est unique si et seulement si il n'existe qu'une seule extension de $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ vérifiant les conditions précédentes.

Démonstration.

Commençons par supposer que la multi-suite $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ admette une mesure positive de représentation μ. On pose alors :

$$\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu(t). \tag{1.2.26}$$

Bien évidemment, ceci implique que la condition (i) est vérifiée. On définit ensuite une forme linéaire $L_{\tilde{\gamma}}$ associée à la mesure μ sur $\mathbb{R}_{n+m}[t,s]$ en posant :

$$L_{\tilde{\gamma}} \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_{n+m}[t,s] & \to & \mathbb{C} \\ t^\alpha s^\beta & \to & \tilde{\gamma}_{\alpha,\beta} \end{array} \right. \tag{1.2.27}$$

Soit $q(t,s) = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} t^\alpha s^\beta$ un élément de $\mathbb{R}_{n+m}[t,s]$, alors on a :

$$\begin{aligned} L_{\tilde{\gamma}}(q\bar{q}) &= L_{\tilde{\gamma}}(\sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} t^\alpha s^\beta \sum_{\alpha,\beta} \overline{b_{\alpha,\beta}} t^\alpha s^\beta) = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon} b_{\alpha,\beta} \overline{b_{\delta,\varepsilon}} L_{\tilde{\gamma}}(t^{\alpha+\delta} s^{\beta+\varepsilon}) \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon} b_{\alpha,\beta} \overline{b_{\delta,\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} t^{\alpha+\delta} \theta(t)^{\beta+\varepsilon} d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |q(t,\theta(t))|^2 d\mu(t) \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

Ceci revient à dire que la forme linéaire $L_{\tilde{\gamma}}$ est semi-définie positive sur $\mathcal{R}_\theta$. Il ne reste donc plus qu'à montrer les conditions (ii) et (iii). Pour ce qui est de (ii), on sait que les fonctions $[\theta_j(t)p_j(t) - 1]t^\alpha \theta(t)^\beta$ sont identiquement nulles. Il en est, donc, de même pour leurs intégrales quels que soient α et β multi-indices positifs :

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\theta_j(t)p_j(t) - 1] t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu(t) = 0. \tag{1.2.29}$$

Ceci se traduit directement par l'égalité suivante :

$$\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} a_{j,K} \int_{\mathbb{R}^n} t^{\alpha+K} \theta(t)^{\beta+e_j} d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu(t). \tag{1.2.30}$$

En conclusion, nous obtenons que la relation suivante est vérifiée :

$$\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} a_{j,K}\, \tilde{\gamma}_{\alpha+K,\beta+e_j} = \tilde{\gamma}_{\alpha,\beta},\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m \quad ; \quad j = 1, \cdots, n. \tag{1.2.31}$$

Pour la dernière propriété à vérifier, on utilise le fait que l'on contrôle le support de la mesure. En effet, puisque le support de la mesure positive est inclus dans l'ensemble $\cap_{(j,l) \in \{1,\cdots,m\} \times L_j} r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$, les formes associées aux suites $(\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} r_{j,l,K} \tilde{\gamma}_{\alpha+K,\beta})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m}$ sont également semi-définies positives pour tout couple $(j,l) \in \{1, \cdots, m\} \times L_j$. Cela revient à prouver que $L_{j,l}(q\bar{q}) \geq 0$ où $L_{j,l}$ est la forme linéaire associée à la multi-suite $(\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} r_{j,l,K} \tilde{\gamma}_{\alpha+K,\beta})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m}$. Or, avec les mêmes notations que précédemment, on a pour tout polynôme q de $\mathbb{R}_{n+m}[t,s]$:

$$\begin{aligned} L_{j,l}(q\bar{q}) &= L_{j,l}(\sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} t^\alpha s^\beta \sum_{\alpha,\beta} \bar{b}_{\alpha,\beta} t^\alpha s^\beta) = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon} b_{\alpha,\beta}\, \bar{b}_{\delta,\varepsilon}\, L_{j,l}(t^{\alpha+\delta} s^{\beta+\varepsilon}) \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon} b_{\alpha,\beta}\, \bar{b}_{\delta,\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} r_{j,l,K}\, t^{\alpha+\delta+K}\, \theta(t)^{\beta+\varepsilon} d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} r_{j,l,K}\, t^K \sum_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon} b_{\alpha,\beta}\, \bar{b}_{\delta,\varepsilon}\, t^{\alpha+\delta} \theta(t)^{\beta+\varepsilon} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} r_{j,l}(t)\, |r(t,\theta(t))|^2 d\mu(t) \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2.32}$$

Ceci entraîne la première implication de notre corollaire.

Pour l'implication inverse, on suppose maintenant qu'il existe une multi-suite $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\beta\in\mathbb{Z}_+^m}$ qui vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et qui est semi-définie positive sur $\mathcal{R}_\theta$. On définit alors une forme linéaire λ sur $\mathcal{R}_\theta$, qui à un élément $r \in \mathcal{R}_\theta$ associe $L_{\tilde{\gamma}}(q)$, où r et q ($q \in \mathbb{R}_{n+m}[t,s]$) sont reliés par la relation $q(t,\theta(t)) = r(t)$. Par le lemme 1.2.1, on sait qu'il existe un isomorphisme :

$$\mathcal{R}_\theta \backsimeq \mathbb{R}_{n+m}[t,s]/\mathcal{I}_\omega. \tag{1.2.33}$$

Commençons par vérifier que la forme linéaire λ est bien définie. Si q_1 et q_2 sont deux éléments de $\mathbb{R}_{n+m}[t,s]$ qui satisfont à l'égalité :

$$r(t) = q_1(t,\theta(t)) = q_2(t,\theta(t)), \tag{1.2.34}$$

alors $q_1 - q_2$ est dans l'idéal $\mathcal{I}_\omega$. Or par le lemme 1.2.1, on connaît des générateurs de cet idéal : si f est dans $\mathcal{I}_\omega$ on peut écrire $L_{\tilde{\gamma}}(f) = \sum_{j=1}^m L_{\tilde{\gamma}}(f_j\omega_j)$, où les $(f_j)_j$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_{n+m}[t,s]$. De plus, on peut calculer la valeur de $L_{\tilde{\gamma}}(f_j\omega_j)$ pour tout $j = 1,\cdots,m$:

(1.2.35)
$$\begin{aligned}
L_{\tilde{\gamma}}(f_j\omega_j) &= L_{\tilde{\gamma}}[f_j(t,s)s_jp_j(t) - f_j(t,s)] = -L_{\tilde{\gamma}}(f_j) + \sum_{K\in\mathbb{Z}_+^n} a_{j,K}L_{\tilde{\gamma}}[f_j(t,s)s_jt^K] \\
&= \sum_{K\in\mathbb{Z}_+^n} a_{j,K}L_{\tilde{\gamma}}(\sum_{h=(h',h'')\geq 0} c_ht^{h'+K}s^{h''+e_j}) - L_{\tilde{\gamma}}(\sum_{h=(h',h'')\geq 0} c_ht^{h'}s^{h''}) \\
&= \sum_{h=(h',h'')\geq 0} c_h[\sum_{K\in\mathbb{Z}_+^n} a_{j,K}\tilde{\gamma}_{h'+K,h''+e_j} - \tilde{\gamma}_{h',h''}] = 0,
\end{aligned}$$

où bien évidemment, $f_j = \sum_{h=(h',h'')\geq 0} c_ht^{h'}s^{h''}$.
On obtient donc que la forme $L_{\tilde{\gamma}}$ est nulle sur l'idéal $\mathcal{I}_\omega$. Ceci nous permet d'affirmer que la forme linéaire λ est bien définie. A partir de cette forme, on en définit une seconde $L^1_{\tilde{\gamma}}$ par la relation suivante :

$$L^1_{\tilde{\gamma}}\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_{n+m}[t,s]/\mathcal{I}_\omega & \to & \mathbb{C} \\ r + \mathcal{I}_\omega & \mapsto & L_{\tilde{\gamma}}(r), \end{array}\right.$$

En utilisant l'isomorphisme (1.2.33), on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_\theta \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{C} \\
\mathbb{R}_{n+m}[t,s]/\mathcal{I}_\omega \arrow[u, shift left, "isomorphisme"] \arrow[ur, "L^1_{\tilde{\gamma}}"'] &
\end{tikzcd}$$

On peut donc identifier λ et $L^1_{\tilde{\gamma}}$. Ceci implique que λ est une forme linéaire semi-définie positive puisque $L^1_{\tilde{\gamma}}$ l'est.

De plus, la condition (iii) implique que les formes de l'énoncé du théorème 1.2.5 sont bien semi-définies positives aussi. On applique donc le théorème 1.2.5.

Reste à prouver l'équivalence entre l'unicité du prolongement et celui de la mesure de représentation. Supposons que $\tilde{\gamma}$ soit l'unique prolongement de la multi-suite γ. On suppose, de plus, que l'on ait deux mesures positives μ' et μ'' de représentation, alors on obtiendrait les égalités :

$$\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta} = \int t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu'(t) = \int t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu''(t). \tag{1.2.36}$$

Ceci entraîne bien évidemment :

$$\int p(t) d\mu'(t) = \int p(t) d\mu''(t), \quad \forall p \in \mathcal{R}_\theta. \tag{1.2.37}$$

Mais comme nous l'a déjà remarqué dans le théorème 1.2.5, $\mathcal{R}_\theta$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mu')$ et $\mathcal{L}^2(\mu'')$. Ceci entraîne l'égalité entre les deux mesures.

Inversement, supposons que γ n'admette qu'une seule mesure de représentation. On suppose qu'il existe un second prolongement $(\delta_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ de la multi-suite γ. Alors, par la première partie de la démonstration de ce corollaire, il existerait deux mesures positives telles que l'on ait :

$$\delta_{\alpha,\beta} = \int t^\alpha \hat{\theta}(t)^\beta d\mu'(t) \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}_{\alpha,\beta} = \int t^\alpha \hat{\theta}(t)^\beta d\mu''(t). \tag{1.2.38}$$

Comme il a été supposé que la mesure de représentation de γ était unique, on a forcément $\mu' = \mu''$. Ceci nous donne directement $\delta_{\alpha,\beta} = \tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}$ pour tout couple (α, β) dans $\mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^m$. On obtient donc bien l'unicité du prolongement de la multi-suite γ. ■

1.2.7 Remarques : (1) Si l'on fait $m = n$ et si l'on pose $p_j(t) = 1 + t_j^2$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, on retrouve le théorème 2.3 de [Vas3]. Ceci nous permet de répondre au problème des moments de Hamburger et de Stieltjes en plusieurs variables.

(2) Et si on se place dans le cas $m = 1$ et $p_1(t) = 1 + t_1^2 + \cdots + t_n^2 + q_1^2(t) + \cdots + q_m^2(t)$, on obtient le théorème 2.5 de [Pu-Vas2].

(3) On peut donner un cas particulier plus compréhensible (avec des indexations moins lourdes !) au corollaire 1.2.6. Supposons que $(A_1, \cdots, A_m)$ soit une partition de $\{1, \cdots, n\}$. On notera par $\mathcal{B}_{A_1,\cdots,A_m}$ l'algèbre engendrée par les éléments de la forme :

$$t^\alpha \prod_{l=1}^{m} (1 + \sum_{j \in A_l} t_j^2)^{-\kappa_l}; \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Alors le corollaire précédent se traduit par :
Soient $A_1, \cdots, A_m$ une partition de $\{1, \cdots, n\}$. Soit $(x_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ une multi-suite. Alors, $(x_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ est une multi-suite de moments sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe une $(m+n)$-suite $(\tilde{x}_{\alpha,\kappa})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \kappa \in \mathbb{Z}_+^m}$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\tilde{x}_{\alpha,0} = x_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$
(ii) $\tilde{x}_{\alpha,\kappa} = \tilde{x}_{\alpha,\kappa+e_l} + \sum_{j \in A_l} \tilde{x}_{\alpha+2e_j,\kappa+e_l}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+^m, \quad l = 1, \cdots, m,$

et telle que la forme associée à $(\tilde{x}_{\alpha,\kappa})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\kappa\in\mathbb{Z}_+^m}$ *soit semi-définie positive sur l'algèbre* $\mathcal{B}_{A_1,\cdots,A_k}$.
En particulier, pour l'étude de la sous-normalité, c'est cette version dont on aura besion car on travaillera sur une algèbre de fractions en $2m$ variables avec des dénominateurs de la forme $1+x_j^2+y_j^2 = 1+||z_j||^2$ pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes occupé du problème classique des moments multi-dimensionnel, c'est-à-dire du problème scalaire. Dans la suite de cette section, nous nous intéresserons au problème opératoriel (voir [Vas2] pour le cas borné et [Vas4] pour le cas non borné, voir également [Fr2]).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de HILBERT séparable. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. On fixe, comme dans le théorème précédent 1.2.5, un m-uplet de polynômes $(p_1,\cdots,p_m)$ de $\mathcal{S}^2\subset\mathbb{R}_n[X]$. Alors, on peut donner l'énoncé d'un théorème des moments pour des formes hermitiennes définies sur cet espace vectoriel $\mathcal{D}$. Nous obtenons ainsi un résultat généralisant les théorèmes 2.4 et 2.9 de [Vas4]. Mais avant cela, on rappellera quelques définitions.

1.2.8 Définitions : Soit $\mathcal{M}$ un espace de fonctions définies dans $\mathbb{R}^n$ inclus dans les fonctions mesurables. On dit que $F: Bor(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une *mesure opératorielle positive* si F est une fonction fortement additive dont les valeurs sont des opérateurs positifs et si $F(\mathbb{R}^n)$ est l'identité sur $\mathcal{H}$, notée $I_{\mathcal{H}}$.
Soit Λ une forme hermitienne définie sur $\mathcal{M}\otimes\mathcal{D}$. Alors F est une *mesure de représentation* de Λ si on a $f\in\mathcal{L}^2(F_{x,x})$ pour tout $f\in\mathcal{M}$ et pour tout $x\in\mathcal{D}$ et si :

$$\Lambda(X,Y) = \sum_{j,k}\int f_j g_k dF_{x_j,y_k}, \tag{1.2.39}$$

ceci pour tout couple $(X,Y)\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{D}$ de la forme $\sum_j f_j\otimes x_j$ et $\sum_k g_k\otimes y_k$ respectivement. Dans ce cas, la forme Λ sera appelée *forme de moments.*

Supposons que l'espace $\mathcal{M}$ admette une base algébrique $\mathcal{B}=(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ $(b_0=1)$. Soit $L=(L_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n}$ une $2n$-suite de formes sesquilinéaires définies sur $\mathcal{D}$ (où $L_{0,0}$ est la restriction du produit scalaire de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$) vérifiant :

$$L_{\alpha,\beta}(x,y) = \overline{L_{\beta,\alpha}(y,x)}. \tag{1.2.40}$$

Alors on peut associer à la multi-suite L une forme hermitienne $\Lambda_{L,\mathcal{B}}$ sur $\mathcal{M}\otimes\mathcal{D}$ définie par : pour tout $(X,Y)\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{D}$ de la forme $\sum_j b_j\otimes x_j$ et $\sum_k b_k\otimes y_k$ respectivement,

$$\Lambda_{L,\mathcal{B}}(X,Y) = \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha,\beta}(x_\alpha,y_\beta).$$

On peut remarquer qu'une telle forme est nécessairement *unitale,* c'est à dire que l'on a l'égalité suivante :

$$\Lambda_{L,\mathcal{B}}(1\otimes x,1\otimes x) = L_{0,0}(x,x) = \langle x,x\rangle = ||x||^2. \tag{1.2.41}$$

Cela permet de définir une isométrie de $\mathcal{D}$ sur $1 \otimes \mathcal{D}$ qui se prolonge par continuité à $\mathcal{H}$ tout entier. Enfin, si $\mathcal{M}'$ est une sous-algèbre de l'algèbre de fonctions $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{M}'$-module (par rapport aux opérations classiques), $\mathcal{M} \otimes \mathcal{D}$ est également un $\mathcal{M}'$-module. Soit λ une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{M} \otimes \mathcal{D}$, on dira que λ est $\mathcal{M}'$-*symétrique* si l'égalité suivante est vérifiée :

$$\lambda(g.X, Y) = \lambda(X, \overline{g}.Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{D}, \quad \forall g \in \mathcal{M}'. \tag{1.2.42}$$

1.2.9 Définitions : On dira que la multi-suite L est de *type positif* par rapport à la base $\mathcal{B}$ si la forme hermitienne associée $\Lambda_{L,\mathcal{B}}$ est semi-définie positive.

Maintenant que l'on a rappelé ces quelques définitions, on peut donner une généralisation des théorèmes 2.2 et 2.8 de [Vas4] qui correspond à la « traduction » en termes de problème de moments opératoriels du théorème 1.2.5. Pour ce faire, nous utiliserons toujours les notations définies précédemment.

1.2.10 Théorème : *Soit $(p_1, \cdots, p_m)$ un m-uplet de polynômes de $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}_n[X]$ sans aucun zéro dans $\mathbb{R}^n$ de la forme :*

$$p_j(t) = 1 + \sum_{k \in I_j} t_k^2 + \sum_{l \in L_j} r_{j,l}(t)^2,$$

où les ensembles $(I_j)_{j=1,\cdots,m}$ vérifient la condition (1.2.7) et où les $(r_{j,l})_{j,l}$ sont des polynômes.

Soit ϕ une forme hermitienne positive semi-définie sur $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$ qui est unitale et $\mathcal{R}_\theta$-symétrique. Alors, ϕ est une forme de moments ayant une unique mesure opératorielle de représentation.

Si, de plus, les formes sequilinéaires $\{\phi(r_{j,l}*, *)\}_{(j,l)\in C}$ $(C \subset \{(j,l) \,/\, l \in L_j,\, j = 1, \cdots, m\})$ vérifient $\phi(r_{j,l}X, X) \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$, la mesure de représentation a son support inclus dans $\cap_{(j,l)\in C}\, r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

Démonstration.

On suit la démonstration du théorème 1.2.5. On définit l'ensemble $\mathcal{N}_\phi = \{X \in \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D} \quad / \quad \phi(X, X) = 0\}$. Puis, on complète le quotient $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\phi$ pour obtenir un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\phi$. On définit alors les opérateurs $(A_{j,l})_{j,l}$ et $(T_k)_k$ dans $\mathcal{H}_\phi$ en posant $\mathcal{D}(A_{j,l}) = \mathcal{D}(T_k) = \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\phi$ et où chaque $A_{j,l}$ et T_k correspondent à la multiplication par les polynômes $r_{j,l}$ et t_k respectivement. Leur domaine commun $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\phi$ est donc un sous-espace dense dans $\mathcal{H}_\phi$, par construction, et on a :

$$\begin{cases} A_{j,l}(X + \mathcal{N}_\phi) = r_{j,l}X + \mathcal{N}_\phi, \quad X \in \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}, \quad \forall (j,l) \in \{1, \cdots, m\} \times L_j. \\ \\ T_k(X + \mathcal{N}_\phi) = t_k X + \mathcal{N}_\phi, \quad X \in \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}, \quad \forall k \in I_1 \cup \cdots \cup I_m. \end{cases} \tag{1.2.43}$$

De plus, les opérateurs $(A_{j,l}, T_k)_{j,k,l}$ forment une famille commutative d'opérateurs symétriques du fait que les variables utilisées sont réelles. De la même manière, les opérateurs $(U_j)_{j=1,\cdots,m}$, définis par $\sum_{k\in I_j} T_k^2 + \sum_{l \in L_j} A_{j,l}^2$ sur l'espace $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\phi$, sont positifs à domaines denses. On peut observer que chaque U_j $(j = 1, \cdots, m)$ est bijectif sur $\mathcal{D}(U_j) = \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\phi$ (vu la stabilité de ce dernier par des multiplications polynômiales). En effet, pour tout élément X de $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle U_j(X+\mathcal{N}_\phi), X+\mathcal{N}_\phi\rangle_{\mathcal{H}_\phi} = & \sum_{k\in I_j} \phi(t_k^2.X, X) + \sum_{l\in L_j} \phi(r_{j,l}^2.X, X) \\ = & \sum_{k\in I_j} \phi(t_k.X, t_k.X) + \sum_{l\in L_j} \phi(r_{j,l}.X, r_{j,l}.X) \geq 0, \end{aligned} \tag{1.2.44}$$

puisque ϕ est $\mathcal{R}_\theta$-symétrique. De plus, pour tout $X \in \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$, il existe un élément $X' = \theta_j(t).X$ de $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$ tel que l'on ait :

$$[I+U_j](X') = [1 + \sum_{k\in I_j} t_k^2 + \sum_{l\in L_j} r_{j,l}^2].X' = p_j\theta_j.X = X. \tag{1.2.45}$$

Puis, on utilise la même astuce que dans le théorème 1.2.5. Comme chaque $I + U_j$ est un opérateur positif et bijectif à domaine dense et que ce domaine est invariant par U_j, ceci implique que les opérateurs $\Big[I+U_i\Big]\Big[I+U_j\Big] - I$ sont essentiellement auto-adjoints (pour tout couple $(i,j) \in \{1,\cdots,m\}^2$). En appliquant maintenant le lemme 1.2.4 à chacun de ces opérateurs, nous en déduisons que les opérateurs $A_{j,l}$ et T_k sont de fermetures canoniques $\overline{A_{j,l}}$ et $\overline{T_k}$ auto-adjointes et que ces fermetures commutent pour tout $j = 1,\cdots,m$, pour tout $l \in L_j$ et pour tout $k \in I_1 \cup \cdots \cup I_m$. De plus, par la condition (1.2.7), les monômes $t_1,\cdots,t_n$ sont dans l'ensemble $\{t_k \quad / \quad k \in I_1\cup\cdots\cup I_m\}$. Soit E la mesure spectrale jointe de la famille commutative d'opérateurs auto-adjoints associée à ces polynômes.
Puisque ϕ est unitale, $\mathcal{H}$ peut être vu comme un sous-espace fermé de $\mathcal{H}_\phi$: en effet, on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \phi(1\otimes x, 1\otimes x) = ||x||^2.$$

Donc l'application suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathcal{H}_\phi \\ x & \mapsto & 1\otimes x \end{cases}$$

est une isométrie que l'on peut prolonger par continuité à $\mathcal{H}$ tout entier. Soit $P_\mathcal{H}$ la projection orthogonale de $\mathcal{H}_\phi$ sur $\mathcal{H}$ (voir (1.2.41)). On pose alors :

$$F(*) = P_\mathcal{H} E(*)|_\mathcal{H}. \tag{1.2.46}$$

Soit $r \in \mathcal{R}_\theta$ et soit $X \in \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$, on définit l'opérateur R par $R(X+\mathcal{N}_\phi) = rX + \mathcal{N}_\phi$. Si $r(\overline{T_1},\cdots,\overline{T_n})$ est donné par le calcul fonctionnel de la famille commutative des opérateurs auto-adjoints $\overline{T_1},\cdots,\overline{T_n}$, nous avons $R \subset r(\overline{T_1},\cdots,\overline{T_n})$ (comme dans le théorème 1.2.5). En utilisant l'isométrie déjà citée, pour tout couple $(x,r) \in \mathcal{D}\times\mathcal{R}_\theta$, on obtient :

(1.2.47)

$$\begin{aligned} \phi(r\otimes x, r\otimes x) &= \langle R(\mathbf{1}\otimes x), R(\mathbf{1}\otimes x)\rangle_{\mathcal{H}_\phi} \approx \langle Rx, Rx\rangle_{\mathcal{H}_\phi} \\ &= \langle r(\overline{T_1},\cdots,\overline{T_n})x, r(\overline{T_1},\cdots,\overline{T_n})x\rangle_{\mathcal{H}_\phi} = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| r(t_1,\cdots,t_n)\Big|^2 dF_{x,x}(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} r(t)^2 dF_{x,x}(t). \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que $X = \sum_m h_m \otimes x_m$ et $Y = \sum_k g_k \otimes y_k$ soient dans $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$. Dans ces conditions, avec les mêmes notations que précédemment, on obtient (si l'on note par $(H_m)_m$ et $(G_k)_k$ les opérateurs multiplications par les fractions $(h_m)_m$ et $(g_k)_k$ respectivement sur $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$) :

$$\begin{aligned}\phi(X,Y) &= \sum_{k,m} \phi(h_m \otimes x_m, g_k \otimes y_k) \approx \sum_{k,m} \phi(H_m x_m, G_k y_k) \\ &= \sum_{k,m} \phi(h_m(t)x_m, g_k(t)y_k) = \sum_{k,m} \int_{\mathbb{R}^n} h_m(t)\overline{g_k(t)}dF_{x_j,y_k}(t).\end{aligned}$$

Ceci prouve bien que F est une mesure de représentation de ϕ.

Pour l'unicité de la mesure de représentation, si $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ sont deux mesures de représentation de ϕ, pour tout $r \in \mathcal{R}_\theta$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$(1.2.48) \qquad \phi_x(r) = \phi(r \otimes x, 1 \otimes x) = \int r(t)dF^{(j)}_{x,x}(t), \qquad j = 1,2.$$

Or ϕ_x est une forme linéaire positive qui vérifie les hypothèses du théorème 1.2.5. Donc, les mesures scalaires $F^{(1)}_{x,x}$ et $F^{(2)}_{x,x}$ sont égales. Ceci est vrai pour tout $x \in \mathcal{D}$, donc par densité nous avons $F^{(1)} = F^{(2)}$.
Soit $(j,l) \in \{1,\cdots,m\} \times L_j$, $\phi(r_{j,l}X, X) \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$. Ceci implique que les opérateurs auto-adjoints $(\overline{A_{j,l}})_{j,l}$ sont positifs et donc la mesure spectrale est incluse dans $r^{-1}_{j,l}(\mathbb{R}^+)$. Par conséquent, le support de la mesure de représentation est dans l'ensemble $\bigcap_{\{(j,l)\,/\, l\in L_j,\, j=1,\cdots,m\}} r^{-1}_{j,l}(\mathbb{R}^+)$. ■

1.2.11 Théorème : *Soit $(p_1,\cdots,p_m)$ un m-uplet de polynômes avec les mêmes propriétés que dans le théorème* 1.2.5. *Soit $\phi = (\phi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+}$ une suite de formes hermitiennes sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ telle que ϕ_0 soit la restriction du produit scalaire sur $\mathcal{H}$ à $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Alors ϕ est une suite de moments si et seulement si il existe une suite $\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}_{\alpha,\beta})_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+,\beta\in\mathbb{Z}^m_+}$ de formes hermitiennes de type positif vérifiant :*

(i) $\quad \tilde{\phi}_{\alpha,0} = \phi_\alpha, \ \forall\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

(ii) $\quad \displaystyle\sum_{K\in\mathbb{Z}^n_+} a_{j,K}\tilde{\phi}_{\alpha+K,\beta+e_j} = \tilde{\phi}_{\alpha,\beta}, \quad \forall\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, \quad \forall\beta \in \mathbb{Z}^m_+ \quad ; \quad j = 1,\cdots,n.$

De plus, la suite ϕ admet une mesure de représentation unique sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la suite $\tilde{\phi}$ est unique.

Enfin, avec les notations (1.2.25), *si les suites $(\sum_{\mathbb{Z}^n_+} r_{j,l,K}\tilde{\gamma}_{\alpha+K,\beta})_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+,\beta\in\mathbb{Z}^m_+}$ sont semi-définies positives pour tout couple (j,l) tel que $l \in L_j$, $\quad j = 1,\cdots,m$, le support de cette mesure est inclus dans $\bigcap_{\{(j,l)\,/\, l\in L_j,\, j=1,\cdots,m\}} r^{-1}_{j,l}(\mathbb{R}^+)$.*

Démonstration.
Commençons par supposer que la n-suite de formes hermitiennes $\phi = (\phi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+}$ admette une mesure de représentation F. Si on prend $x \in \mathcal{D}$ et $r \in \mathcal{R}_\theta$, on a $r \in \mathcal{L}^2(F_{x,x})$, on peut donc définir :

$$(1.2.49) \qquad \tilde{\phi}_{\alpha,\beta}(x,y) = \int t^\alpha\theta(t)^\beta dF_{x,y}(t), \quad \forall\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, \quad \forall\beta \in \mathbb{Z}^m_+, \quad \forall(x,y) \in \mathcal{D}^2.$$

On définit la fonction g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+m}$ par $g(t) = (t, \theta(t)) \in \mathbb{R}^{n+m}$, alors on a l'égalité suivante :

$$(1.2.50) \qquad \tilde{\phi}_{\alpha,\beta}(x,y) = \int g(t)^{(\alpha,\beta)} dF_{x,y}(t), \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^m, \quad x, y \in \mathcal{D}.$$

Et nous obtenons que $F(g^{-1}(*))$ est une mesure de représentation pour la multi-suite $(\tilde{\phi}_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m}$. Par le lemme 1.4 de [Vas4], la multi-suite de formes $\tilde{\phi}$ est de type positif. De plus, $\tilde{\phi}$ vérifie bien la condition (i). Et comme on a la fonction $[\theta_j(t)p_j(t) - 1]t^\alpha \theta^\beta(t)$ qui est nulle pour tout couple (α, β) dans $\mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^m$, l'intégrale suivante devient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\theta_j(t)p_j(t) - 1]t^\alpha \theta^\beta(t) dF_{x,y}(t) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2.$$

Ceci se traduit par l'égalité :

$$\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} a_{j,K} \int_{\mathbb{R}^n} t^{\alpha+K} \theta^{\beta+e_j}(t) dF_{x,y}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta^\beta(t) dF_{x,y}(t), \, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^m,$$

ceci pour tout entier $j = 1, \cdots, n$. Et donc, cela nous donne pour la famille de formes hermitiennes :

$$(1.2.51) \qquad \sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} a_{j,K} \tilde{\phi}_{\alpha+K, \beta+e_j} = \tilde{\phi}_{\alpha,\beta}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^m; \quad j = 1, \cdots, n.$$

Inversement, supposons qu'une multi-suite $\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m}$ existe. A partir de cette $(n+m)-$suite, on définit une forme hermitienne λ positive sur $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$ en posant :

$$(1.2.52) \qquad \lambda(r_1 \otimes x_1, r_2 \otimes x_2) = \lambda_{\tilde{\phi}}(q_1 \otimes x_1, q_2 \otimes x_2),$$

où r_1 et r_2 appartiennent à $\mathcal{R}_\theta$, où le couple (x_1, x_2) est dans $\mathcal{D}^2$ et où on a (pour $i = 1, 2$) $q_i \in \mathbb{R}_{n+m}[t, s]$ tel que $r_i(t) = q_i(t, \theta(t))$.

On rappelle la définition de $\lambda_{\tilde{\phi}}$:
$\mathbb{R}_{n+m}[t, s]$ admet une base algébrique $(e_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$, on définit alors pour $X = \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta} \otimes x_{\alpha,\beta}$ et $Y = \sum_{\delta,\varepsilon} e_{\delta,\varepsilon} \otimes y_{\delta,\varepsilon}$ dans $\mathbb{R}_{n+m}[t, s] \otimes \mathcal{D}$:

$$(1.2.53) \qquad \lambda_{\tilde{\phi}}(X, Y) = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon} \tilde{\phi}_{\alpha+\delta, \beta+\varepsilon}(x_{\alpha,\beta}, y_{\delta,\varepsilon}).$$

Il faut vérifier que la forme λ est bien définie. Pour ce faire, on utilise le lemme 1.2.1 et on fait les mêmes démarches que dans le théorème 1.2.5 pour montrer que $\lambda|_{\mathcal{I}_\omega \otimes \mathcal{D}} = 0$.
La positivité de λ provient de celle de $\tilde{\phi}$. On a donc construit une forme hermitienne de type positif sur $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$. Or par le théorème 1.2.10, on sait qu'une telle forme hermitienne sur $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$ qui est en plus unitale et $\mathcal{R}_\theta$-symétrique est une forme de moments (c'est une méthode où l'on définit des opérateurs auto-adjoints).
Pour montrer que λ est bien unitale, on prend $x \in \mathcal{D}$, et on a :

$$\lambda(1 \otimes x, 1 \otimes x) = \tilde{\phi}_{0,0}(x,x) = \phi_0(x,x) = ||x||^2.$$

Donc λ est bien unitale. Montrons maintenant que λ est $\mathcal{R}_\theta$-symétrique. Soient X et Y dans $\mathcal{R}_\theta \otimes \mathcal{D}$ et soit p un élément de $\mathcal{R}_\theta$ (grâce à la linéarité, on peut toujours supposer que $p(t) = t^a\theta^b(t)$, $a \in \mathbb{Z}_+^n$ et $b \in \mathbb{Z}_+^m$), alors les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\lambda(p.X, Y) &= \lambda_{\tilde{\phi}}(\sum_{\alpha,\beta} t^a s^b . e_{\alpha,\beta} \otimes x_{\alpha,\beta}, \sum_{\delta,\varepsilon} e_{\delta,\varepsilon} \otimes y_{\delta,\varepsilon}) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon} \tilde{\phi}_{\alpha+a+\delta,\beta+b+\varepsilon}(x_{\alpha,\beta}, y_{\delta,\varepsilon}) \\
&= \lambda_{\tilde{\phi}}(\sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta} \otimes x_{\alpha,\beta}, \sum_{\delta,\varepsilon} e_{\delta+a,\varepsilon+b} \otimes y_{\delta,\varepsilon}) \\
&= \lambda_{\tilde{\phi}}(\sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta} \otimes x_{\alpha,\beta}, \sum_{\delta,\varepsilon} t^a s^b . e_{\delta,\varepsilon} \otimes y_{\delta,\varepsilon}) = \lambda(X, p.Y).
\end{aligned} \tag{1.2.54}$$

Donc λ est également $\mathcal{R}_\theta$-symétrique. Ceci nous permet donc d'affirmer qu'il existe une mesure de représentation F pour λ. Alors, pour tout couple (x, y) dans $\mathcal{D}^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, on a :

$$\phi_\alpha(x, y) = \tilde{\phi}_{\alpha,0}(x, y) = \lambda_{\tilde{\phi}}(t^\alpha \otimes x, 1 \otimes y) = \int t^\alpha dF_{x,y}(t).$$

Pour la dernière partie de la démonstration, supposons que $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ soient deux mesures de représentation de ϕ, si on a unicité du prolongement, alors pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ on a :

$$\int t^\alpha \theta^\beta(t) dF_{x,y}^{(1)}(t) = \int t^\alpha \theta^\beta(t) dF_{x,y}^{(2)}(t). \tag{1.2.55}$$

Donc cette égalité est également vraie pour tout $r \in \mathcal{R}_\theta$. Ceci implique que $F^{(1)} = F^{(2)}$ (voir théorème 1.2.10). Supposons maintenant que ϕ admette une unique mesure de représentation F. Alors forcément tout prolongement de ϕ sera de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta^\beta(t) dF_{x,y}(t),$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, d'où l'unicité du prolongement. ■

Comme conséquences directes de ce théorème 1.2.11, nous obtenons les théorèmes 2.4 et 2.9 de [Vas4] (voir remarque 1.2.6). De plus, comme corollaire de ce théorème, on peut donner une caractérisation pour qu'une multi-suite d'opérateurs auto-adjoints admette une représentation intégrale.

1.2.12 Corollaire : *Soit $A = (A_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ($A_0 = Id_\mathcal{D}$) une n-suite d'opérateurs auto-adjoints définis sur l'espace $\mathcal{D}$. Soit $(p_1, \cdots, p_m)$ un m-uplet de polynômes avec les mêmes propriétés que dans le théorème* 1.2.5. *La n-suite A est une multi-suite de moments opératoriels, avec une mesure positive opératorielle à support dans $\cap_{(j,l)\in C}\, r_{j,l}^{-1}(\mathbb{R}^+)$,*

$(C = \{1, \cdots, m\} \times L_j)$ *si et seulement si il existe une* $(n+m)$*-suite, d'opérateurs sur* $\mathcal{D}$, $\tilde{A} = (\tilde{A}_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m}$ *de type défini positif sur* $\mathcal{D}$ *vérifiant les trois conditions suivantes :*

(i) $\tilde{A}_{\alpha,0} = A_\alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

(ii) $\displaystyle\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} a_{j,K} \tilde{A}_{\alpha+K,\beta+e_j} = \tilde{A}_{\alpha,\beta}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \ \beta \in \mathbb{Z}_+^m ; \quad j = 1, \cdots, n.$

(iii) *en utilisant les notations* (1.2.25), *les suites* $(\sum_{K \in \mathbb{Z}_+^n} r_{j,l,K} \tilde{A}_{\alpha+K,\beta})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m}$ *sont semi-définies positives, pour tout couple*$(j,l) \in C$.

De plus cette mesure est unique si et seulement si il n'existe qu'une seule extension de $A = (A_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$.

Démonstration.
On pose, pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$:

$$\phi_\alpha(x,y) = \langle A_\alpha x, y \rangle. \tag{1.2.56}$$

Puisque les opérateurs $(A_\alpha)_\alpha$ sont auto-adjoints, les formes linéaires ϕ_α sont hermitiennes et le fait que A_0 soit l'identité restreinte à $\mathcal{D}$, implique que ϕ_0 est bien la restriction du produit scalaire de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Les hypothèses (i), (ii) et (iii) de ce corollaire 1.2.12 impliquent celles du théorème 1.2.11. De manière classique, on peut associer à toute forme hermitienne $\tilde{\phi}_{\alpha,\beta}$ un opérateur auto-adjoint $\tilde{A}_{\alpha,\beta}$ en posant :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}, \quad \tilde{\phi}_{\alpha,\beta}(x,y) = \langle \tilde{A}_{\alpha,\beta} x, y \rangle. \tag{1.2.57}$$

Donc la famille A admet un prolongement $(\tilde{A}_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ si et seulement si la multi-suite des formes hermitiennes $(\phi_\alpha)_\alpha$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ est une multi-suite de moments. Mais dans ce cas, pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, on obtient :

$$\langle \tilde{A}_{\alpha,0} x, y \rangle = \tilde{\phi}_{\alpha,0}(x,y) = \int t^\alpha dF_{x,y}(t). \tag{1.2.58}$$

Et finalement, on obtient la représentation intégrale suivante, pour tout multi-indice positif α :

$$A_\alpha = \int t^\alpha dF(t), \tag{1.2.59}$$

où F est une mesure positive opératorielle.

Pour l'unicité de la mesure de représentation F et pour le lieu de son support, cela provient directement des propriétés de l'extension des formes linéaires $(\phi_\alpha)_\alpha$. En effet, l'unicité de l'extension de la famille d'opérateurs auto-adjoints $(A_\alpha)_\alpha$ implique l'unicité de la famille de formes hermitiennes $(\tilde{\phi}_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ qui prolonge $(\phi_\alpha)_\alpha$ (et vice-versa). ∎

1.2.13 Remarques :

(1) Ce dernier corollaire 1.2.12 est à rapprocher du corollaire 2.10 de [Vas4], où un cas particulier de fractions rationnelles est étudié.

(2) Ce dernier résultat nous permet également de donner une solution au problème opératoriel de Hamburger et Stieltjes dans le cas de plusieurs variables.

(3) Ce sera ce type de méthodes que l'on va utiliser pour donner, dans le troisième chapitre, deux critères de sous-normalité jointe pour des familles d'opérateurs non nécessairement bornés ayant un sous-espace dense stable par chacun des « opérateurs coordonnées » (voir le théorème 3.3.2 et le corollaire 3.3.4).

Appendice : Remarques sur la détermination de suites doublement infinies

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures admettant des moments à tous les ordres, on dira que μ_1 est *équivalente* à μ_2, (et on notera $\mu_1 \sim \mu_2$) si pour tout multi-indice $\alpha \geq 0$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu_2(t).$$

De plus dans toute cette section, lorsque l'on parlera de multi-suites doubles, on supposera toujours qu'elles vérifient la condition $(*)$ définie par :

$$(*) \qquad x_{\alpha,\beta} = x_{\alpha+2e_j,\beta+e_j} + x_{\alpha,\beta+e_j}, \qquad \text{pour tout } j \in \{1, \cdots, n\}.$$

1.A.1 Définition : Soient μ_1 et μ_2 deux mesures admettant des moments à tous les ordres. Soit $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_n)$ avec $\delta_j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ $(j = 1, \cdots, n)$; on dira que μ_1 est *δ-équivalente à* μ_2, (et on notera $\mu_1 \sim_\delta \mu_2$) si pour tout $\alpha \geq 0$ et pour tout β vérifiant $\delta \geq \beta \geq 0$ on a :

$$(1.A.1) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu_2(t).$$

1.A.2 Remarques :

(1) Pour tout δ positif, $\mu_1 \sim_\delta \mu_2$ implique évidemment $\mu_1 \sim \mu_2$. Si μ_1 et μ_2 sont à supports compacts, l'implication inverse est vraie également. En effet, $\forall p \in \mathbb{R}[t]$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu_1(t) - \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu_2(t)\right| &\leq \mu_1(\mathbb{R}^n)||t^\alpha\theta(t)^\beta - p(t)||_{K_1} \\ &\quad + \left|\int_{\mathbb{R}^n} p(t) d\mu_1(t) - \int_{\mathbb{R}^n} p(t) d\mu_2(t)\right| \\ &\quad + \mu_2(\mathbb{R}^n)||t^\alpha\theta(t)^\beta - p(t)||_{K_2} \\ &\leq [\mu_1(\mathbb{R}^n) + \mu_2(\mathbb{R}^n)].||t^\alpha\theta(t)^\beta - p||_{K_1 \cup K_2}. \end{aligned}$$

Puis, on conclut en utilisant la densité des polynômes dans $C^0(K_1 \cup K_2)$ (ensemble des fonctions continues sur le compact $K_1 \cup K_2$) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu_2(t).$$

(2) En utilisant la méthode des théorèmes 2.5 et 2.8 de [Pu-Vas2], on montre que toute forme linéaire semi-définie positive sur $\mathcal{A}_\theta$ admet une unique mesure de

représentation. Cela signifie que pour $\delta = (\infty, \cdots, \infty)$, nous avons $\sim_\delta$ qui n'est rien d'autre que l'égalité.

(3) Ce dernier point est une différence majeure avec le « *Two-sided moment problem* » traité dans [BCR] (on pourra regarder aussi [JTW] et [JTN]) ; le problème est : étant donnée une application ϕ,

$$\begin{cases} \phi : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & k & \to & \phi(k) \end{cases}$$

peut-on trouver une mesure de représentation positive μ telle que $\phi(k) = \int x^k d\mu(t)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$? (l'avantage ici est que la base est multiplicative.) Contrairement à notre problème, la mesure de représentation n'est pas forcément unique comme le prouve l'exemple suivant (voir [BCR]) : si $d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1} e^{-\frac{(lnx)^2}{2}} dx$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^k sin(2\pi lnx) d\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2-kt}{2}} sin(2\pi t) dt \\ &= e^{\frac{k^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} sin(2\pi y) dy = 0, \end{aligned}$$

puisque la dernière fonction intégrée est impaire. On obtient donc l'égalité suivante pour tout triplet (A, B_1, B_2) de $\mathbb{R}^3$:

$$\int_0^\infty x^k [A - B_1 sin(2\pi lnx)] d\mu(x) = \int_0^\infty x^k [A - B_2 sin(2\pi lnx)] d\mu(x).$$

La mesure μ est positive et comme la fonction *sinus* est bornée, si l'on prend A positif tel que A soit plus grand que les valeurs absolues de B_1 et B_2 (avec $B_1 \neq B_2$), on obtient deux mesures positives $d\mu_1(x) = [A - B_1 sin(2\pi lnx)] d\mu(x)$ et $d\mu_2(x) = [A - B_2 sin(2\pi lnx)] d\mu(x)$ ayant les mêmes moments. Ceci prouve bien que l'on n'a pas forcément l'unicité de la mesure de représentation dans le cadre du « Two-sided moment problem. »

1.A.3 Définition : Une suite double $(x_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \geq 0}$, semi-définie positive sur $\mathcal{A}_\theta$, admet toujours une mesure de représentation unique μ (voir [Pu-Vas2]). Cette mesure μ (ou la suite $(x_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \geq 0}$) sera dite *unilatéralement déterminée* si μ est l'unique mesure de représentation de la suite $(x_{\alpha,0})_{\alpha \geq 0}$. Et la mesure μ (ou la suite) sera dite δ-*déterminée* s'il n'existe pas d'autre mesure δ-équivalente.

On peut noter qu'une suite unilatéralement déterminée est δ-déterminée quel que soit $\delta \in \mathbb{Z}_+^n$. Une suite unilatéralement déterminée sera aussi dite (plus simplement) déterminée en rapport avec la définition dans le cas des multi-suites simples.

1.A.4 Proposition : *Soit $(x_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ une multi-suite, $(x_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ est une suite de moments déterminée si et seulement si $(x_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ admet un unique prolongement bilatéral positif. Ce prolongement est en particulier unilatéralement déterminé.*

Démonstration.
Si $(x_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ est déterminée. On pose pour tout couple (α, β) de multi-indices positifs :

$$x_{\alpha,\beta} = \int t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu(t),$$

où μ est la mesure de représentation de la suite $(x_\alpha)_{\alpha\geq 0}$. La multi-suite $(x_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\geq 0}$ est unilatéralement déterminée car s'il existait une mesure ρ telle que $x_{\alpha,\beta} = \int t^\alpha \theta(t)^\beta d\rho(t)$, en particulier on aurait $x_{\alpha,0} = \int t^\alpha d\rho(t)$. Et par détermination, on obtiendrait $\mu = \rho$. Si $(y_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\geq 0}$ est un autre prolongement de la suite x, il existerait une mesure σ telle que $y_{\alpha,\beta} = \int t^\alpha \theta(t)^\beta d\sigma(t)$. A nouveau, par détermination, on obtient $\sigma = \mu$ et donc $y_{\alpha,\beta} = x_{\alpha,\beta}$ pour tout multi-indice positif.

Inversement, si $(x_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ est un prolongement bilatéral positif, on peut écrire $x_{\alpha,\beta} = \int t^\alpha \theta(t)^\beta d\mu(t)$, et donc $(x_\alpha)_\alpha$ est une multi-suite de moments. S'il existait une seconde mesure de représentation ρ, on pourrait construire la suite $y_{\alpha,\beta} = \int t^\alpha \theta(t)^\beta d\rho(t)$, qui serait un prolongement bilatéral positif de $(x_\alpha)_\alpha$. Mais on a supposé que celui-ci était unique donc $x_{\alpha,\beta} = y_{\alpha,\beta}$ pour tout multi-indice positif, c'est à dire que $\rho \sim_{(\infty,\cdots,\infty)} \mu$. Et par la remarque précédente, nous obtenons $\rho = \mu$. ■

Dans la suite (et quand on se limitera au cas d'une seule variable), si u est un nombre réel strictement positif, nous noterons par $B^\delta_{u,\mu}(0,1)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}_\theta(\delta)$ qui vérifient l'inégalité suivante :

$$(1.A.2) \qquad ||f||_u = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^u d\mu(t) \Big)^{1/u} \leq 1.$$

Pour la proposition 1.A.6 et le corollaire 1.A.7, on se place dans le cas d'une seule variable.

1.A.5 Définition : On peut définir une fonction semblable à la fonction majorante de Hall-Mergelyan dans le cadre de nos fractions rationnelles : pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on peut définir la fonction $M_{\alpha,\beta}$ sur $\mathbb{C}$ par (voir [Be] et [Koo]) :

$$(1.A.3) \qquad M_{\alpha,\beta}(z) = \sup_{p\in\mathbb{C}[t]} \Big\{ |p(z)| \text{ tel que} \int_{\mathbb{R}} \frac{|p(t)|^\alpha}{(1+t^2)^\beta} d\mu(t) \leq 1 \Big\}.$$

1.A.6 Proposition : *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in]1, +\infty[$. S'il existe un nombre z_0 dans $\mathbb{C} \setminus supp(\mu)$ et un second $\beta_0 \geq \alpha/2$ tels que $M_{\alpha,\beta_0}(z_0) < +\infty$ alors $\mathbb{C}[t]$ n'est pas dense dans $\mathcal{L}^\alpha(\mu)$ (et dans ce cas $M_{\alpha,\beta}(z_0) < \infty$ pour tout $\beta \geq \alpha/2$). Par contre, si $M_{\alpha,\alpha/2}(z) = +\infty$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus supp(\mu)$, $\mathbb{C}[t]$ est dense dans $\mathcal{L}^\alpha(\mu)$.*

Démonstration.
Soient α, β dans $\mathbb{R}$, vérifiant $1 < \alpha \leq 2\beta < +\infty$. S'il existe un nombre $z_0 \in \mathbb{C} \setminus supp(\mu)$ tel que $M_{\alpha,\beta_0}(z_0) < +\infty$, on pose :

$$(1.A.4) \qquad d\mu_\beta(t) = \frac{d\mu(t)}{(1+t^2)^\beta} \text{ et } ||f||_{\alpha,\beta} = \Big[\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^\alpha d\mu_\beta(t) \Big]^{1/\alpha}.$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[t]$, on a :

$$|P(z_0)| \leq M_{\alpha,\beta_0}(z_0)\Big[\int_{\mathbb{R}} |P(t)|^\alpha d\mu_\beta(t)\Big]^{1/\alpha} = M_{\alpha,\beta_0}(z_0) \quad ||P||_{\alpha,\beta}.$$

On a donc une forme linéaire continue, ceci entraîne qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^\varepsilon(\mu_\beta)$ ($f \neq 0$), si $\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} = 1$:

$$(1.A.5) \qquad P(z_0) = \int_{\mathbb{R}} P(t)f(t)d\mu_\beta(t), \quad \text{où } f \in \mathcal{L}^\varepsilon(\mu_\beta), \quad f \neq 0_{\mathcal{L}^\varepsilon(\mu_\beta)}.$$

De ce fait, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[t]$ de la forme $(t - z_0)q(t)$, on a :

$$0 = P(z_0) = \int_{\mathbb{R}} P(t)f(t)d\mu_\beta(t).$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{t - z_0}{(1 + t^2)^\beta} f(t)\Big|^\varepsilon d\mu(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|t - z_0|^\varepsilon}{(1 + t^2)^{\beta\varepsilon}} |f(t)|^\varepsilon d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|t - z_0|^\varepsilon}{(1 + t^2)^{\beta\varepsilon-\beta}} \frac{|f(t)|^\varepsilon}{(1 + t^2)^\beta} d\mu(t).\end{aligned}$$

Si $2\beta\varepsilon \geq \varepsilon + 2\beta$, ce qui revient à $2\beta \geq \alpha$, on a dans ces conditions :

$$(1.A.6) \qquad \int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{|t - z_0|^\varepsilon}{(1 + t^2)^{\beta\varepsilon-\beta}} \frac{|f(t)|^\varepsilon}{(1 + t^2)^\beta}\Big| d\mu(t) \leq A||f||^\varepsilon_{\varepsilon,\beta}.$$

Donc la fonction $g(t) = (t - z_0)f(t)(1 + t^2)^{-\beta}$ est dans $\mathcal{L}^\varepsilon(\mu)$. De plus, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[t]$, nous savons que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} P(t)g(t)d\mu(t)$ est nulle. Donc $\mathbb{C}[t]$ n'est pas dense dans l'espace $\mathcal{L}^\alpha(\mu)$ puisque $g \neq 0_{\mathcal{L}^\varepsilon(\mu)}$. En effet, f a cette propriété et z_0 n'est pas dans le support de la mesure μ.

Supposons maintenant que $\mathbb{C}[t]$ ne soit pas dense dans $\mathcal{L}^\alpha(\mu)$. Il existe donc une fonction $g \neq 0_{\mathcal{L}^\varepsilon(\mu)}$ dans $\mathcal{L}^\varepsilon(\mu)$ telle que, pour tout polynôme P, on ait $\int_{\mathbb{R}} P(t)g(t)d\mu(t) = 0$. Soit $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}} g(t)(t-z)^{-1}d\mu(t)$, ϕ est une fonction holomorphe sur l'ensemble $\mathbb{C} \setminus supp(\mu)$ (voir les propriétés sur les transformations de Cauchy). Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus supp(\mu)$, et soit $P \in \mathbb{C}[t]$. On écrit alors $P(t) = P(z_0) + (t - z_0)q(t)$, avec $q \in \mathbb{C}[t]$. Alors, on obtient :

$$(1.A.7) \qquad \begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)P(t)}{t - z_0} d\mu(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)P(z_0)}{t - z_0} d\mu(t) + \int_{\mathbb{R}} g(t)q(t)d\mu(t) \\ &= P(z_0) \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{t - z_0} d\mu(t) = P(z_0)\phi(z_0).\end{aligned}$$

Donc si $\phi(z_0) \neq 0$, on en déduit l'inégalité :

$$\begin{aligned} |P(z_0)| &\leq \frac{1}{|\phi(z_0)|}\Big(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^{\varepsilon} d\mu(t)\Big)^{1/\varepsilon}\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{|P(t)|^{\alpha}}{|t-z_0|^{\alpha}} d\mu(t)\Big)^{1/\alpha} \\ &\leq \frac{||g||_{\varepsilon}}{|\phi(z_0)|}\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{|P(t)|^{\alpha}}{(1+t^2)^{\beta}} \frac{(1+t^2)^{\beta}}{|t-z_0|^{\alpha}} d\mu(t)\Big)^{1/\alpha} \\ &\leq \frac{||g||_{\varepsilon}}{|\phi(z_0)|} ||P||_{\alpha,\beta} \sup_{t\in supp(\mu)} \frac{(1+t^2)^{\beta/\alpha}}{|t-z_0|}. \end{aligned}$$

Soit $C(z)$ la fonction définie par :

(1.A.8) $$C(z) = \frac{1}{|\phi(z)|} \sup_{t\in supp(\mu)} \frac{(1+t^2)^{1/2}}{|t-z_0|} < +\infty.$$

La fonction C est continue sur son ensemble de définition. Et on obtient :

(1.A.9) $$|P(z_0)| \leq ||P||_{\alpha,\alpha/2}\, ||g||_{\varepsilon}\, C(z_0).$$

Enfin, en passant à la borne supérieure, nous avons :

(1.A.10) $$M_{\alpha,\alpha/2}(z_0) \leq ||g||_{\varepsilon}\, C(z_0) < +\infty.$$

Dans le cas où $\phi(z_0) = 0$, on prend r dans $]0, dist(z_0, supp(\mu))[$ tel que $\phi(z)$ ne s'annule pas sur le cercle d'équation $|z - z_0| = r$. Par le principe du maximum, on obtient l'inégalité suivante :

(1.A.11) $$|P(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |P(z)| \leq ||P||_{\alpha,\alpha/2}\, ||g||_{\varepsilon} \max_{|z-z_0|=r} C(z) < \infty,$$

puis on conclut comme précédemment. ■

Dans le cas de n variables, on montre que, si $\mathbb{C}[t_1, \cdots, t_n]$ dense dans $\mathcal{L}^{\alpha}(\mu)$, alors $M_{\alpha,\beta}(z_1, \cdots, z_n) = +\infty$ pour tout $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et pour tout multi-indice β supérieur à $(\alpha/2, \cdots, \alpha/2)$ (c'est-à-dire que $\beta_i \geq \alpha/2$ pour $i = 1, \cdots, n$).

1.A.7 Définition : Soit $\mathcal{A}_{\theta}(\delta)$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $t^{\alpha}\theta(t)^{\beta}$, avec $\alpha \geq 0$ et $\delta \geq \beta \geq 0$. On pose alors la boule unité :

$$B^{\delta}_{\alpha,\mu}(0,1) = \Big\{ f \in \mathcal{A}_{\theta}(\delta) \text{ tel que } (\int |f(t)|^{\alpha} d\mu(t))^{1/\alpha} \leq 1 \Big\}.$$

1.A.8 Corollaire : *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Si on pose*

(1.A.12) $$F_{\alpha,\delta}(z) = \sup_{f\in B^{\delta}_{\alpha,\mu}(0,1)} \{|f(z)|\}.$$

S'il existe un nombre complexe z_0 dans $\mathbb{C} \setminus (supp(\mu) \cup \{-i, i\})$ tel que $F_{\alpha,\delta}(z_0) < +\infty$ alors $\mathcal{A}_\theta(\delta - 1)$ n'est pas dense dans $\mathcal{L}^\alpha(\mu)$. Et si $F_\alpha(z) = +\infty$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (supp(\mu) \cup \{-i, i\})$ alors $\mathcal{A}_\theta(\delta)$ est dense dans $\mathcal{L}^\alpha(\mu)$.

Démonstration.
S'il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (supp(\mu) \cup \{-i, i\})$ tel que $F_{\alpha,\delta}(z_0) < +\infty$, pour tout $f \in \mathcal{A}_\theta(\delta)$, on a :

$$|f(z_0)| \leq F_{\alpha,\delta}(z_0) \, ||f||_\alpha. \tag{1.A.13}$$

La forme linéaire ainsi définie est continue, donc si $\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} = 1$, on obtient par dualité :

$$f(z_0) = \int_{\mathbb{R}} g(t) f(t) d\mu(t) \text{ où } g \in \mathcal{L}^\varepsilon(\mu), g \neq 0_{\mathcal{L}^\varepsilon(\mu)}. \tag{1.A.14}$$

Donc, si f est de la forme $(t - z_0)h(t)$, on a $0 = f(z_0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t) f(t) d\mu(t)$. De plus, il existe un A positif vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}} |\frac{t - z_0}{(1 + t^2)} g(t)|^\varepsilon d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|t - z_0|^\varepsilon}{(1 + t^2)^\varepsilon} |g(t)|^\varepsilon d\mu(t) \leq A \, ||g||_\varepsilon^\varepsilon. \tag{1.A.15}$$

Donc la fonction $k(t) = (t - z_0) g(t) (1 + t^2)^{-1}$ est dans $\mathcal{L}^\varepsilon(\mu)$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{A}_\theta(\delta - 1)$, nous savons que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t) k(t) d\mu(t)$ est nulle. On en déduit que l'espace $\mathcal{A}_\theta(\delta - 1)$ n'est pas dense dans $\mathcal{L}^\alpha(\mu)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}_\theta(\delta)$ ne soit pas dense dans $\mathcal{L}^\alpha(\mu)$. Il existe donc une fonction $g \neq 0_{\mathcal{L}^\varepsilon(\mu)}$ dans $\mathcal{L}^\varepsilon(\mu)$ telle que, pour toute fraction rationnelle f de $\mathcal{A}_\theta(\delta)$, nous ayons :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) d\mu(t) = 0. \tag{1.A.16}$$

On définit la fonction ϕ par $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}} g(t)(t - z)^{-1}(1 + t^2)^{-\delta} d\mu(t)$; ϕ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus supp(\mu)$. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (supp(\mu) \cup \{-i, i\})$, et soit $f \in \mathcal{A}_\theta(\delta)$. On écrit alors :

$$f(t) = \frac{P(t)}{(1 + t^2)^\delta} = \frac{P(z_0)}{(1 + t^2)^\delta} + \frac{(t - z_0) q(t)}{(1 + t^2)^\delta}, \text{ avec } q \in \mathbb{C}[t]. \tag{1.A.17}$$

L'égalité (1.A.17) entraîne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t) f(t)}{t - z_0} d\mu(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t) P(z_0)}{(t - z_0)(1 + t^2)^\delta} d\mu(t) + \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t) q(t)}{(1 + t^2)^\delta} d\mu(t) \\ &= P(z_0) \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(t - z_0)(1 + t^2)^\delta} d\mu(t) = P(z_0) \, \phi(z_0). \end{aligned} \tag{1.A.18}$$

Donc si $\phi(z_0) \neq 0$, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &\leq \frac{1}{|1+z_0^2|^\delta\,|\phi(z_0)|}\Big(\int_{\mathbb{R}}|g(t)|^\varepsilon d\mu(t)\Big)^{1/\varepsilon}\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|^\alpha}{|t-z_0|^\alpha}d\mu(t)\Big)^{1/\alpha}\\
&\leq \frac{||g||_\varepsilon}{|1+z_0^2|^\delta\,|\phi(z_0)|}\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|^\alpha}{|t-z_0|^\alpha}d\mu(t)\Big)^{1/\alpha}\\
&\leq \frac{||g||_\varepsilon}{|1+z_0^2|^\delta\,|\phi(z_0)|}\,||f||_\alpha \sup_{t\in supp(\mu)}\frac{1}{|t-z_0|}.
\end{aligned}$$

Soit $C(z)$ la fonction définie par :

$$C(z) = \frac{1}{|1+z^2|^\delta|\phi(z)|}\sup_{t\in supp(\mu)}\frac{1}{|t-z_0|} < +\infty. \tag{1.A.19}$$

La fonction C est continue sur son ensemble de définition. Et on obtient l'inégalité :

$$|f(z_0)| \leq ||f||_\alpha\,||g||_\varepsilon\,C(z_0). \tag{1.A.20}$$

Cette dernière relation (1.A.20) revient à écrire :

$$F_{\alpha,\delta}(z_0) \leq ||g||_\varepsilon\,C(z_0). \tag{1.A.21}$$

Dans le cas où $\phi(z_0) = 0$, on prend r dans $]0, dist(z_0, supp(\mu))[$ tel que $\phi(z)$ ne s'annule pas sur le cercle d'équation $|z - z_0| = r$. Par le principe du maximum, on obtient l'inégalité suivante :

$$|f(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r}|f(z)| \leq ||f||_\alpha||g||_\varepsilon \max_{|z-z_0|=r} C(z) < \infty. \tag{1.A.22}$$

■

Pour conclure cette annexe, on peut donner le pendant de la proposition 2.2 de [JTN] pour une suite double $x = (x_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\geq 0}$ dans le cas d'une variable.

1.A.9 Proposition : *La suite $x = (x_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\geq 0}$ admet une mesure de représentation dont le support n'est pas de cardinal fini si et seulement si la forme associée est définie positive.*

Démonstration.
Si la forme associée ϕ est définie positive, la suite admet une mesure de représentation μ unique. Si cette mesure avait un support fini $(\eta_1, \cdots, \eta_p)$, en particulier pour le polynôme

$$R(t) = \prod_{1\leq j\leq p}\Big[(t_1-\eta_{j,1})^2 + \cdots + (t_n - \eta_{j,n})^2\Big],$$

on aurait $\phi(R^2) = 0$, où les multi-points η_j sont notés $(\eta_{j,1}, \cdots, \eta_{j,n})$ $(j = 1, \cdots, p)$. Ceci contredit le fait que ϕ soit définie.

Inversement, si le cardinal de la mesure n'est pas fini, on ne peut pas trouver de fractions rationnelles qui s'annulent sur tous les points de son suppport autre que 0, ce qui est équivalent au fait que la forme associée soit définie. ■

Pour conclure cet appendice, on peut noter que M. PUTINAR et F.-H. VASILESCU donnent un nouveau critère de détermination dans le cas de multi-suites (voir le théorème 2.1 de [Pu-Vas3]). Ils généralisent en particulier des méthodes de M. RIESZ, où le cas d'une seule variable a été traité.

Chapitre II

Représentation polynômiale

Comme nous l'avons précédemment dit, un argument simple montre qu'il existe des polynômes non négatifs en deux variables qui ne peuvent s'écrire comme somme de carrés de polynômes. C'est HILBERT le premier qui en donna une preuve en 1888 (sans pour autant en donner un exemple). Dans la seconde moitié du $XX^{ième}$ siècle, plusieurs exemples explicites apparurent. On peut citer un polynôme très simple dû à MOTZKIN en 1967 (voir [BCR]) et un exemple de 1968 de R.M. ROBINSON (voir [Rob]). En 1900, HILBERT énonce le $17^{ième}$ problème qui porte son nom : est-ce que tout polynôme positif peut s'écrire comme somme de carrés de fractions rationnelles ? E. ARTIN répond de façon positive à cette question en 1927.

Comme le montrent des articles comme ceux de GILLES CASSIER (voir [Cas2]) ou de KONRAD SCHMÜDGEN (voir [Sch]), il existe une relation entre le problème des moments et la représentation polynômiale. Notre but ici sera de donner des représentations pour certains polynômes positifs. Dans la première section, on donnera des décompositions pour des polynômes positifs sur des compacts quelconques (en utilisant en particulier des résultats obtenus dans la section I-1). Cela nous permet en particulier de généraliser des résultats de [Cas2], [Vas2], [Be-Ma], [Pu-Vas] et surtout de [Pu2].

Dans un second temps, nous utiliserons des méthodes dues à MIHAIL PUTINAR et FLORIAN-HORIA VASILESCU (voir [Pu-Vas2]) pour donner des représentations de polynômes qui sont strictement positifs sur des ensembles non bornés. Pour cela on se placera dans une algèbre $\mathcal{A}_\theta$ de fractions rationnelles bornées. Cette seconde partie a d'ailleurs fait l'objet d'un article paru en 2000 dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (voir [De]) et d'un second à paraître dans *Positivity* (voir [De3]).

Enfin, dans la dernière section de ce Chapitre II, nous étudierons plus en détails les formes linéaires positives sur cette algèbre $\mathcal{A}_\theta$ pour en déduire une représentation sous forme de *moments avec limites*. Grâce à cette écriture intégrale, nous obtiendrons des résultats sur le problème tronqué des moments en plusieurs variables qui généralisent des propositions de M. RIESZ.

Partie II.1 Représentation sur un compact

Soit K un compact arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Comme on l'a vu dans la première section I-1 (voir le lemme 1.1.2), il existe une suite $(P_i)_{i\geq 0}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que l'on puisse écrire K sous la forme $\cap_{i\geq 0}\hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$. On supposera, comme dans la section I-1 que les $(\hat{P}_i)_{i\geq 0}$ engendrent en tant qu'algèbre $\mathbb{R}[X]$. On rappelle que l'on note alors $\mathcal{T}$ « *l'ensemble test* » (voir (1.1.7)). On peut alors donner une représentation des polynômes qui sont strictement positifs sur l'ensemble compact K :

2.1.1 Proposition : *Tout polynôme strictement positif sur K est dans le cône positif engendré par les éléments de $\mathcal{T}$.*

La démonstration s'inspire d'une preuve de G. Cassier (voir le théorème 4 de [Cas2]) mais nous voulons ici utiliser un lemme de [Pu-Vas2] (le lemme 4.1). De ce fait, la démonstration en est différente.

Démonstration.
Nous allons utiliser le lemme 4.1 de [Pu-Vas2]. Pour ce faire, vérifions que toutes les conditions de ce lemme sont bien vérifiées ici. Le rôle de $\mathcal{C}$ sera joué par le cône positif engendré par les éléments de $\mathcal{T}$. On pose ensuite $\mathcal{S} = \mathcal{P}(K)$ et $\mathcal{C}_d$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ de degré total plus petit que d (on notera l'ensemble des polynômes de degré plus petit que d par $\mathbb{R}^{(<d)}[X]$). Soit, enfin, $\mathcal{S}_d$ l'ensemble défini par $\mathcal{S}_d = \mathcal{C}_d - \mathcal{C}_d$ ($d \geq 0$). Il faut et il suffit de montrer alors :

$$(2.1.1) \qquad \begin{cases} \mathcal{S} = \mathcal{C} - \mathcal{C} \\ \mathcal{C}_{d+1} \cap \mathcal{S}_d = \mathcal{C}_d \\ \mathcal{S}_d \text{ est de dimension finie,} \\ \phi \in \mathcal{S}_d^* \text{ telle que } \phi(1) = 0 \text{ et } \phi|_{\mathcal{C}_d} \geq 0 \Rightarrow \phi = 0. \end{cases}$$

La première relation est évidente. On sait que les $(\hat{P}_i)_i$ engendrent en tant qu'algèbre $\mathbb{R}[X]$. Donc, pour tout polynôme P, on peut écrire :

$$(2.1.2) \qquad P(X) = \sum_{c_J > 0} c_J \prod_j \hat{P}_j^{\alpha_j}(X) - \sum_{c_J < 0} (-c_J) \prod_j \hat{P}_j^{\alpha_j}(X).$$

Pour la seconde relation, on a :

$$(2.1.3) \qquad \mathcal{C}_{d+1} \cap \mathcal{S}_d \subset \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^{(<d+1)}[X] \cap \mathbb{R}^{(<d)}[X] \subset \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^{(<d)}[X] = \mathcal{C}_d.$$

L'inclusion inverse est évidente. De plus, $\mathcal{S}_d$ est un espace vectoriel de dimension finie puisqu'il est inclus dans $\mathbb{R}^{(<d)}[X]$. Enfin pour la dernière relation, on prend une forme ϕ positive sur $\mathcal{C}_d$ (avec $\phi(1) = 0$), on va montrer que cette forme est identiquement nulle. On prend un polynôme $\hat{P}_i$ vérifiant $deg(\hat{P}_i) \leq d$, alors on a $\phi(\hat{P}_i) \geq 0$ et $\phi(1 - \hat{P}_i) \geq 0$ ce qui revient à $\phi(\hat{P}_i) = 0$. Montrons par itération que $\phi(\hat{P}_i^m) = 0$ pour tout m satisfaisant à $m \times deg(\hat{P}_i) \leq d$. Si cela est vrai pour le polynôme $\hat{P}_i^l$, montrons que cela est vrai pour $\hat{P}_i^{l+1}$. Par notre hypothèse de positivité, on a $\phi(\hat{P}_i^{l+1}) \geq 0$ et $\phi(\hat{P}_i^l(1 - \hat{P}_i)) \geq 0$ ce qui revient à dire :

$$(2.1.4) \qquad 0 \leq \phi(\hat{P}_i^{l+1}) \leq \phi(\hat{P}_i^l) = 0.$$

Puis on fait la même démarche avec les produits. Si le polynôme $\hat{P}_i^k \hat{P}_j$ a un degré inférieur à d, on obtient par les inégalités $\phi(\hat{P}_i^k \hat{P}_j) \geq 0$ et $\phi(\hat{P}_i^k(1 - \hat{P}_j)) \geq 0$:

$$(2.1.5) \qquad 0 \leq \phi(\hat{P}_i^k \hat{P}_j) \leq \phi(\hat{P}_i^k) = 0.$$

En allant pas à pas, on montre que $\phi(\hat{P}_i^k \hat{P}_j^l) = 0$ dès que $k\, deg(\hat{P}_i) + l\, deg(\hat{P}_j) \leq d$. Enfin, ce qui a été fait pour le produit de deux polynômes peut se faire pour un produit quelconque. Comme tout élément de $\mathcal{T}$ est combinaison linéaire de polynômes de la forme précédente, on obtient que $\phi|_{\mathcal{S}_d} = 0$. On peut donc appliquer le lemme 4.1 de [Pu-Vas2].

Soit P un polynôme strictement positif sur K. Supposons que $P \in \mathcal{S}_{d_0} \backslash int(\mathcal{C}_{d_0})$, alors il existe une forme linéaire non identiquement nulle ϕ sur $\mathcal{S}$, positive sur $\mathcal{C}$, telle que $\phi(P) \leq 0$. Mais alors, en particulier, ϕ sera positive sur $\mathcal{T}$ et donc admettra une mesure de représentation μ positive et de support non vide dans K. Dans ce cas, on obtient

$$0 \geq \phi(P) = \int_K P(t) d\mu(t) > 0. \tag{2.1.6}$$

Donc, par la contradiction (2.1.6), on peut affirmer que P est dans l'intérieur d'un certain $\mathcal{C}_{d_0}$, ce qui prouve en particulier la proposition. ■

Si $K = \cap_{0 \leq i \leq m} p_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$ est un compact semi-algébrique, on peut donner une solution au problème des moments grâce au cône convexe positif des carrés de polynômes $\mathcal{S}^2$, voir [Sch2]. Dans un article récent, M. Putinar donne une décomposition de polynômes strictement positifs sur K (voir [Pu2]) à l'aide des polynômes $(p_i)_{0 \leq i \leq m}$, du cône $\mathcal{S}^2$ et d'un troisième élément. En fait, il prouve que tout polynôme r strictement positif sur K vérifie :

$$r \in \mathcal{S}^2 + p_1 \mathcal{S}^2 + \cdots + p_m \mathcal{S}^2 + q\mathcal{S}^2,$$

où q est un quelconque polynôme positif sur K de la forme :

$$q(t) = -a_1 t_1^{2d} - \cdots - a_n t_n^{2d} - q_{2d}(t) + q_1(t),\ a_i > 0, i = 1, \cdots, n, \tag{2.1.7}$$

où q_{2d} est une somme de carrés de polynômes homogènes de degré d et $deg(q_1) < 2d$. On essayera de donner un équivalent de ce théorème dans le cas de compacts arbitraires. L'idée de départ est toujours la même, on relie la géométrie de tout compact à l'algèbre des polynômes $\mathbb{R}[X]$ par :

$$K = \bigcap_{i \geq 1} p_i^{-1}(\mathbb{R}^+). \tag{2.1.8}$$

Cette famille sera fixée pour notre compact K. On note par $\mathcal{S}_K^2$ le cône positif suivant :

$$\mathcal{S}_K^2 = \mathcal{S}^2 + p_1 \mathcal{S}^2 + \cdots + p_k \mathcal{S}^2 + \cdots \tag{2.1.9}$$

La méthode de M. Putinar est basée sur le théorème des moments de [Sch2] pour les compacts semi-algébriques. Pour démontrer ce dernier théorème, K. Schmüdgen utilise un résultat de géométrie algébrique sur les ensembles semi-algébriques. Nous ne pourrons donc pas appliquer directement cette méthode. On a besoin d'une condition supplémentaire pour compenser la perte d'information (la « Positivstellensatz ») due au passage au cas arbitraire. Pour ce faire, on peut introduire un polynôme p_∞ de degré pair tel que $K \subset p_\infty^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et que $p_\infty^{-1}(\mathbb{R}^+)$ soit un nouveau compact (semi-algébrique celui-là). On prend par exemple un polynôme du type de celui utilisé par M. PUTINAR et G. CASSIER, c'est-à-dire :

$$\text{(2.1.10)} \qquad \begin{cases} p_\infty(t) = -a_1 t_1^{2d} - \cdots - a_n t_n^{2d} - r_\infty(t),\ a_i > 0, i = 1, \cdots, n, \\ p_\infty(t) > 0,\ \forall t \in K, \\ deg(r_\infty) < 2d. \end{cases}$$

2.1.2 Lemme : *Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$. Alors ϕ admet une mesure positive de représentation sur K si et seulement si elle est semi-définie positive sur $\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2$.*

Démonstration :
Si ϕ admet une mesure positive de représentation sur K, il est évident qu'elle sera positive pour tout polynôme positif sur K. Elle sera donc, en particulier positive, sur $\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2$. Inversement, soit $K' = p_\infty^{-1}(\mathbb{R}^+)$. K' est un compact contenant K. Par le théorème 1 de [Sch2], il existe une mesure positive μ telle que

$$\text{(2.1.11)} \qquad \phi(r) = \int_{K'} r(t) d\mu(t), \quad \forall r \in \mathbb{R}[X].$$

Par le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, on montre que $supp(\mu) \subset K$ grâce à la positivité sur $\mathcal{S}_K^2$. ■

2.1.3 Lemme : *Soit p un polynôme qui n'appartient pas à l'intérieur de $(\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2) \cap \mathbb{R}^{(<2m)}[X]$, pour tout m. Alors, il existe une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{R}[X]$ qui soit positive sur $\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2$ et qui soit négative en p.*

Pour des lemmes similaires, on peut se référer également à [Cas2] (qui fut le premier à utiliser cette méthode), [Sch2], [Pu2], [Pu-Vas] et caetera.

Démonstration :
Il suffit de montrer que l'on peut appliquer le lemme 2.2.9 (*i.e. :* le lemme 4.1 de [Pu-Vas2]). On définit le cône positif $\mathcal{C}_m = (\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2) \cap \mathbb{R}^{(<2m)}[X]$ et l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{K,m}$ par $\mathcal{C}_m - \mathcal{C}_m$. On commence par vérifier :

$$\text{(2.1.12)} \qquad \begin{cases} \mathcal{C}_m - \mathcal{C}_m \subset \mathbb{R}^{(<2m)}[X] \\ (\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2) - (\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2) = \mathbb{R}[X] \\ \mathcal{C}_{m+1} \cap \mathcal{S}_{K,m} = \mathcal{C}_m \end{cases}$$

La première inclusion est évidente et entraîne que les espaces $\mathcal{S}_{K,m}$ sont de dimensions finies. Ensuite, la seconde égalité provient du fait que $(\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2)$ contient, en particulier, $\mathcal{S}^2$ et que pour tout polynôme p, on a : $p = [(p+1)^2 - (p-1)^2]/4$. Enfin pour la troisième propriété, on a :

$$\text{(2.1.13)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{C}_{m+1} \cap \mathcal{S}_{K,m} &\subset (\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2) \cap \mathbb{R}^{(<2m+2)}[X] \cap \mathbb{R}^{(<2m)}[X] \\ &\subset (\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2) \cap \mathbb{R}^{(<2m)}[X] = \mathcal{C}_m. \end{aligned}$$

Comme l'inclusion inverse est évidente, on obtient bien l'égalité voulue. Il suffit maintenant de montrer que si on prend une forme linéaire ϕ positive sur $\mathcal{C}_m$ qui vérifie

$\phi(1) = 0$ alors ϕ est identiquement nulle sur $\mathcal{S}_{K,m}$. Pour toute la suite, on supposera $m > max\{1, deg(p_\infty)\}$, ce qui ne gêne en rien puisque nos cônes sont emboités les uns dans les autres. Comme en particulier $\phi|_{\mathcal{S}^2} \geq 0$, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\phi(p)|^2 \leq \phi(1)\,\phi(p^2) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}^{(<m)}[X]. \tag{2.1.14}$$

Puis, nous allons travailler en augmentant le degré des polynômes. On prend le monôme X^α avec $|\alpha| = m+1$. Soit i_0 un entier tel que X_{i_0} apparaisse dans la décomposition de X^α. Alors, on obtient :

$$|\phi(X^\alpha)|^2 \leq \phi(X_{i_0}^2)\,\phi(X^{2\alpha - 2e_{i_0}}) = 0. \tag{2.1.15}$$

De manière plus générale, on suppose que $\phi(X^\alpha) = 0$ pour tout multi-indice vérifiant $|\alpha| = m+k-1$, $k < m$. Si on prend un multi-indice β vérifiant $|\beta| = m+k$, on écrit $\beta = \beta_1 + \beta_2$ avec $|\beta_1| = m$ et $|\beta_2| = k$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité suivante :

$$|\phi(X^\beta)|^2 \leq \phi(X^{2\beta_1})\,\phi(X^{2\beta_2}) = \phi(X^{2\beta_1}) \times 0 = 0. \tag{2.1.16}$$

Alors on obtient $\phi(X^\beta) = 0$. Il ne reste plus qu'à prouver que $\phi(X^\beta) = 0$ pour $|\beta| = 2m$. Par la positivité de ϕ sur $p_\infty \mathcal{S}^2$, on obtient de (2.1.10) :

$$0 \leq \phi(p_\infty) = \phi(-X_1^{2m}) + \cdots + \phi(-X_n^{2m}) \leq 0,$$

ce qui se traduit par :

$$\phi(X_j^{2m}) = 0, \quad \forall j = 1, \cdots, n. \tag{2.1.17}$$

Pour achever la démonstration, on va montrer, par récurrence sur le nombre de variables qui apparaissent, que $\phi(X^\beta) = 0$ pour $|\beta| = 2m$. Pour $n = 1$, c'est ce qui vient d'être prouvé. Supposons que ce soit le cas pour l variables ; c'est-à-dire :

$$\phi(X_1^{\alpha_1} \cdots X_l^{\alpha_l}) = 0, \quad \forall \alpha_1, \cdots, \alpha_l \geq 0, \quad \text{avec} \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_l = 2m. \tag{2.1.18}$$

Soit le monôme $X_1^{\alpha_1} \cdots, X_{l+1}^{\alpha_{l+1}}$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{l+1} = 2m$. Alors, on a soit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l \geq m$, soit $\alpha_{l+1} \geq m$. Si on est dans le second cas, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\phi(X_1^{\alpha_1} \cdots X_{l+1}^{\alpha_{l+1}})|^2 \leq \phi(X_1^{2\alpha_1} \cdots X_l^{2\alpha_l} X_{l+1}^{2\alpha_{l+1} - 2m}) \quad \phi(X_{l+1}^{2m}) = 0, \tag{2.1.19}$$

par l'hypothèse de récurrence au rang 1. Si on est dans le premier cas, on choisit des entiers positifs β_i vérifiant $\beta_i \leq \alpha_i$ $(i = 1, \cdots, l)$ et $\beta_1 + \cdots + \beta_l = m$. Alors on utilise une dernière fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$|\phi(X_1^{\alpha_1} \cdots X_{l+1}^{\alpha_{l+1}})|^2 \leq \phi(X_1^{2(\alpha_1 - \beta_1)} \cdots X_l^{2(\alpha_l - \beta_l)} X_{l+1}^{2\alpha_{l+1}}) \quad \phi(X_1^{2\beta_1} \cdots X_l^{2\beta_l}) = 0, \tag{2.1.20}$$

par l'hypothèse de récurrence au rang l appliquée au monôme $X_1^{2\beta_1} \cdots X_l^{2\beta_l}$. En conclusion, la forme linéaire ϕ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^{(<2m)}[X]$, ceci implique donc que la forme linéaire ϕ est nulle sur $\mathcal{S}_{K,m}$.

On peut donc appliquer le lemme 4.1 de [Pu-Vas2], ce qui nous donne directement le résultat voulu. ■

2.1.4 Remarque : En fait, on a montré un peu plus que le lemme 2.1.3. En effet, on a prouvé que toute forme positive sur $\mathcal{S}_{K,m}$ et qui s'annulait en 1 devait s'annuler sur $\mathbb{R}^{(<2m)}[X]$. Si on munit $\mathbb{R}^{(<2m)}[X]$ de sa norme euclidienne, et si on prend un élément x dans l'orthogonal de $\mathcal{S}_{K,m}$ (qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{(<2m)}[X]$), la forme $\phi_x(*) = \langle x, * \rangle$ est une forme positive sur $\mathcal{S}_{K,m}$ qui s'annule en 1. Par ce qui vient d'être vu, ϕ_x est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^{(<2m)}[X]$; ceci est équivalent à $x = 0$. Donc on a l'égalité suivante :

$$\mathbb{R}^{(<2m)}[X] = \mathcal{S}_{K,m} = \mathcal{C}_m - \mathcal{C}_m, \tag{2.1.21}$$

ceci pour tout m vérifiant $m \geq \ max(2; d)$.

2.1.5 Théorème : *Tout polynôme strictement positif sur K est dans le cône positif $\mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2$.*

Démonstration :
Supposons que $p \notin \mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2$. Alors, par le lemme précédent, il existe une forme linéaire ϕ positive sur ce cône, vérifiant $\phi(p) \leq 0$. Mais par le lemme 2.1.2 (basé sur le théorème 1 de [Sch2]), ϕ admet une représentation intégrale avec une mesure positive. Alors, on obtient :

$$\phi(p) = \int_K p(t) d\mu(t) > 0, \tag{2.1.22}$$

car le support $supp(\mu)$ de μ est non vide puisque ϕ est non identiquement nulle. Ceci contredit le fait que $\phi(p) \leq 0$. Donc, on a bien $p \in \mathcal{S}_K^2 + p_\infty \mathcal{S}^2$. ■

Comme corollaire de ce théorème, on retrouve le théorème 1.3 (de [Pu2]) de décomposition de M. Putinar pour les polynômes positifs sur un compact semi-algébrique.
Dans ce qui suit, on va essayer de diminuer encore les cônes dans lesquels sont situés les polynômes positifs sur K. On voudrait quand cela est possible remplacer $\mathcal{S}^2$ par $\mathcal{S}^{2,0}$ où

$$\mathcal{S}^{2,0} = \{|h(z,y)|^2; h \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]\} \subset \mathcal{S}^2. \tag{2.1.23}$$

Pour ce faire, on va complexifier le problème (voir [Pu], [Pu2], [Atz]). Donc, on pose $z = (z_1, \cdots, z_{[n/2]}) \in \mathbb{C}^{[n/2]}$ ($y = 1$ si n est pair et $y = x_n$ si non et $[*]$ est la fonction partie entière) avec $z_j = x_{2j-1} + i x_{2j}$. Soit $\mathbf{I}$ l'ensemble des entiers i tels que les polynômes p_i soient de la forme $1 - |h(z,y)|^2$ ou $\Re h(z,y)$ avec h polynôme en $[n/2]$ variables. Soit $\mathbf{J}$ le complémentaire de $\mathbf{I}$ dans $\mathbb{N}$. On pose alors :

$$\mathcal{S}_K^{2,0} = \mathcal{S}^2 + \sum_{i \in \mathbf{I}} p_i \mathcal{S}^{2,0} + \sum_{i \in \mathbf{J}} p_i \mathcal{S}^2 \subset \mathcal{S}_K^2. \tag{2.1.24}$$

On peut donner un lemme du type du lemme 3.1 de [Pu2] :

2.1.6 Lemme : *Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ qui est positive sur $\mathcal{S}^2 + p_\infty \mathcal{S}^{2,0}$. Alors, il existe une constante M, indépendante de ϕ, telle que ϕ soit positive sur le cône $\mathcal{S}^2 + (M - |x|^2)\mathcal{S}^{2,0}$ (avec $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$).*

2.1.7 Proposition : *Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$. Alors, ϕ admet une mesure positive de représentation sur K si et seulement si elle est positive sur $\mathcal{S}_K^{2,0} + p_\infty \mathcal{S}^{2,0}$.*

On suit la preuve du théorème 1.3 de [Pu2].

Démonstration : (n pair)
Si ϕ admet une mesure positive de représentation sur K, il est évident qu'elle sera positive sur $\mathcal{S}_K^{2,0} + p_\infty \mathcal{S}^{2,0}$. Inversement, on peut prolonger ϕ par linéarité à $\mathbb{C}[z]$. On utilise alors la méthode de Gelfand-Naimark en posant $\langle p, q\rangle = \phi(p\bar{q})$ pour tout $p, q \in \mathbb{C}[z]$. On quotiente ensuite $\mathbb{C}[z]$ par $\mathcal{N} = \{p, \phi(p\bar{p}) = 0\}$ et on complète pour obtenir un espace de Hilbert. On pose T_i l'opérateur multiplication par z_i sur $\mathbb{C}[z]/\mathcal{N}$. Par le lemme précédent, on peut remarquer que ces opérateurs qui commutent, sont bornés et qu'ainsi on peut les prolonger à tout l'espace. On note enfin que la fermeture $\bar{T}_i$ de T_i est normale, d'adjoint l'application multiplication par $\bar{z}_i$. On lui associe alors une mesure spectrale E et on obtient :
(2.1.25)

$$\phi(p) = \langle p(z, \bar{z})1, 1\rangle = \langle p(T, T^*)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \int_{\sigma(T)} p(z, \bar{z}) d\langle E(z)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \int_{\sigma(T)} p(z, \bar{z}) d\mu(z).$$

De plus la positivité de ϕ sur $\mathcal{S}_K^{2,0}$ nous implique que le support de la mesure est en fait inclus dans le compact K (c'est la proposition 2.4 de [Pu2] qui s'applique).

Si n est impair, on procède de la même manière, on ajoute juste l'opérateur T_y multiplication par la variable y. Cet opérateur est symétrique borné, donc auto-adjoint (il commute avec les opérateurs $T_1, \cdots, T_{[n/2]}$) et on utilise la mesure spectrale jointe de $(T_y, T_1, \cdots, T_{[n/2]})$ pour obtenir la mesure de représentation. ∎

2.1.8 Corollaire : *Tout polynôme strictement positif sur K est dans le cône positif $\mathcal{S}_K^{2,0} + p_\infty \mathcal{S}^{2,0}$.*

Démonstration :
C'est la même démonstration que le théorème 2.1.5 mais au lieu d'utiliser le lemme 2.1.2, on applique la proposition précèdente 2.1.7. ∎

Jusqu'à la fin de cette section, on ne s'occupera plus que de compacts semi-algébriques.

2.1.9 Définition : Soit $K = \cap_{0 \le i \le m} p_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$ est un compact semi-algébrique, on pose $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_m\}$. On dira que la paire $(K, \mathcal{P})$ est représentable s'il existe un polynôme p dans $\mathcal{S}_K^2$ tel que $p^{-1}(\mathbb{R}^+)$ soit compact.

2.1.10 Proposition : *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un polynôme p dans $\mathcal{S}_K^2$ tel que $p^{-1}(\mathbb{R}^+)$ soit compact.
(ii) Toute forme linéaire positive sur $\mathcal{S}_K^2$ admet une mesure de représentation.

(iii) Tout polynôme strictement positif sur K est dans $\mathcal{S}_K^2$.

Démonstration :
(i)⇒ (ii) Puisque p est dans $\mathcal{S}_K^2$, toute forme ϕ, positive sur $\mathcal{S}_K^2$, sera en particulier positive sur $\mathcal{S}^2 + p\mathcal{S}_K^2$. Par le théorème de [Sch2], il existe une mesure positive de support dans $p^{-1}(\mathbb{R}^+)$ qui vérifie

$$\phi(q) = \int_{p^{-1}(\mathbb{R}^+)} q(t)d\mu(t),\ \forall q \in \mathbb{R}[X]. \tag{2.1.26}$$

Enfin, la positivité sur $\mathcal{S}_K^2$ assure que le support de μ est inclus dans K.
(ii)⇒ (iii) C'est la même méthode que dans [Cas2], [Pu2], [Sch2] et caetera. Il suffit d'utiliser un lemme dû à G. Cassier ou une de ses variantes dans [Pu-Vas2].
(iii)⇒ (i) Il suffit de prendre par exemple le polynôme $M - (t_1^2 + \cdots + t_n^2)$, avec M suffisamment grand. ■

2.1.11 Exemples :
(1) C'est le cas du compact élémentaire $K = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$ muni de la famille $\mathcal{P} = (p_1, \cdots, p_{2n})$ où $p_i(t) = t_i - a_i$ et $p_{n+i}(t) = b_i - t_i$ $(i = 1, \cdots n)$. En effet, si on a une forme ϕ, positive sur $\mathcal{S}_K^2$, on peut utiliser la méthode de Gelfand-Naimark. La positivité de la forme ϕ sur $p_{n+i}\mathcal{S}^2$ nous assure que l'opérateur multiplication par la variable t_i est borné dans l'espace de Hilbert associé à ϕ. Et, en utilisant la mesure spectrale associée à ces opérateurs, on obtient une mesure positive à support dans K.
(2) Dans le cas d'une seule variable, tout compact semi-algébrique muni d'une quelconque famille de polynômes sera représentable (voir [Be-Ma]).

2.1.12 Remarque : Tout compact semi-algébrique admet une famille finie de polynômes telle que le couple soit représentable. C'est le théorème de [Sch2]. Le problème est que, d'une famille à m polynômes, on passe à une famille à 2^m éléments.

$$\mathcal{P} = \Big\{p_{i_1} \cdots p_{i_k};\quad i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, m\},\quad 0 \le k \le m\Big\}. \tag{2.1.27}$$

Enfin, on peut finir par quelques remarques sur le théorème 1.4 de [Pu2]. On commence par donner une petite correction à l'énoncé. En effet, le théorème tel qu'il est écrit n'est pas juste. Il faut lire :

2.1.13 Théorème : *Soit $K = \cap_{0 \le i \le m} p_i^{-1}(\mathbb{R}^+)$ un compact semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$. Supposons que les polynômes soient tous de degré pair tels que pour tout $\omega \in S^{n-1}$ (sphère unité dans $\mathbb{R}^n$) il existe un i_ω tel que :*

$$\tilde{p}_{i_\omega}(\omega) = \lim_{r \to \infty} \frac{p_i(r\omega)}{r^{deg(p_{i_\omega})}} < 0. \tag{2.1.28}$$

Alors le couple $(K, \{p_1, \cdots, p_m\})$ est représentable.

Démonstration :
Il suffit de reprendre avec attention la démonstration de M. Putinar. ■

Bien évidemment, comme le signale l'auteur, cette condition est loin d'être nécessaire. Nous pouvons pour conclure cette section en donner un exemple simple. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on pose :

$$\begin{cases} p_1(x,y) = y - x^2 \\ p_2(x,y) = -y - x^2 + 1 \end{cases} \tag{2.1.29}$$

On pose $K = p_1^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap p_2^{-1}(\mathbb{R}^+)$. On voit rapidement que K est un compact inclus dans la boule de centre O et de rayon $\sqrt{2}/2$. De plus, on a $\tilde{p}_1(x,y) = -x^2 = \tilde{p}_2(x,y)$. En particulier, ces deux polynômes s'annulent simultanément en $(0,1)$ et $(0,-1)$. Un calcul simple (dont on passera les détails) nous donne :

$$\begin{aligned} 4 - x^2 - y^2 = \; & \Big[\frac{(x(1-y))^2}{3} + \frac{(x(1+y))^2}{3} + \frac{2x^2}{3} + \frac{5}{2}\Big] \\ & + p_1(x,y)\Big[\frac{1}{2} + \frac{(1-y)^2}{3}\Big] + p_2(x,y)\Big[\frac{7}{6} + \frac{(1+y)^2}{3}\Big]. \end{aligned} \tag{2.1.30}$$

On en déduit que $4 - x^2 - y^2$ est dans $\mathcal{S}_K^2$. Enfin, par la proposition 2.1.10, le couple $(K, \{p_1, p_2\})$ est représentable.

Partie II.2 Représentation sur un fermé non borné

En réponse au $17^{i\grave{e}me}$ problème de HILBERT, E. ARTIN prouve que tout polynôme positif peut s'écrire comme somme de carrés de fractions rationnelles. L'inconvénient d'une telle décomposition provient du fait que l'on autorise toutes les fractions rationnelles. Dans cette partie, nous essayerons de donner une représentation plus précise de polynômes qui sont strictement positifs sur des fermés de $\mathbb{R}^n$ en n'autorisant que des fractions avec des dénominateurs « universels. »

Précisément, nous allons prouver que sous des conditions de positivité d'un polynôme naturellement associé ou sur des conditions sur les coefficients dominants, on peut écrire des polynômes strictement positifs sur $\mathbb{R}^n$ comme somme de fractions rationnelles avec des dénominateurs de la forme :

$$(1+t_1^2)^{\beta_1}\cdots(1+t_n^2)^{\beta_n}, \quad \beta_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i=1,\cdots,n.$$

Pour ce faire, on adapte des techniques de [Pu-Vas2], où le cas de polynômes homogènes a été traité avec des fractions ayant des dénominateurs d'un autre type.

2.2.1 Notation : Si $t=(t_1,\cdots,t_n)$ sont les variables de $\mathbb{R}^n$, Pour tout $i=1,\cdots,n$, on pose :

$$\theta_i(t)=(1+t_i^2)^{-1},\ t\in\mathbb{R}^n.$$

On définit la fonction θ sur $\mathbb{R}^n$ par $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$. Alors pour tout multi-indice $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ dans $\mathbb{Z}_+^n$, on a :

$$\theta^\beta(t)=\theta_1^{\beta_1}(t)\cdots\theta_n^{\beta_n}(t),\ t\in\mathbb{R}^n$$

2.2.2 Proposition : *On définit la famille de fractions rationnelles suivante :*

(2.2.1)
$$\frac{t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}\cdots t_n^{\varepsilon_n}}{(1+t_1^2)^{m_1}\cdots(1+t_n^2)^{m_n}},\ \varepsilon_i\in\Big\{0,1\Big\},\quad m_i\in\mathbb{Z}_+,\quad m_i\geq\varepsilon_i,\quad i\in\{1,\cdots,n\}.$$

Ces fonctions forment une famille libre. De plus, si $\mathcal{A}_\theta$ est l'algèbre des fractions rationnelles bornées avec des dénominateurs de la forme $[\theta^\beta(t)]^{-1}$, alors la famille (2.2.1) *est une base algébrique de $\mathcal{A}_\theta$.*

Démonstration.

On va montrer cette proposition par récurrence sur la dimension n des variables de départ. Pour $n=1$, on prend un m-uplet $(\mu_1,\cdots,\mu_m)$ dans $\mathbb{C}^m$. Supposons que nous ayons l'égalité suivante :

(2.2.2)
$$\sum_{i=1}^m \mu_i\frac{t_1^{\varepsilon_i}}{(1+t_1^2)^{m_i}}=0.$$

Si p est le minimum de l'ensemble $\{m_i\,;\, i \in \{1, \cdots, m\}\}$, p ne peut apparaître que dans deux fractions seulement :

$$\frac{1}{(1+t_1^2)^p} \text{ ou } \frac{t_1}{(1+t_1^2)^p}.$$

On note μ_r et $\mu_r^{'}$ les coefficients devant ces deux fonctions. Dans ce cas, l'égalité (2.2.2) implique que l'on ait :

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{t_1^{\varepsilon_i}}{(1+t_1^2)^{m_i-p}} = 0.$$

Ceci implique la même égalité pour le passage à la limite :

$$\lim_{t_1\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{t_1^{\varepsilon_i}}{(1+t_1^2)^{m_i-p}} = 0.$$

D'un autre côté, cette limite vaut :

$$\lim_{t_1\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{t_1^{\varepsilon_i}}{(1+t_1^2)^{m_i-p}} = \mu_r \text{ ou } \infty \text{ si } \mu_r^{'} \neq 0.$$

On en conclut que μ_r et $\mu_r^{'}$ sont tous les deux égaux à zéro. Il suffit maintenant de réitérer ce procédé pour obtenir que chaque nombre complexe μ_r est nul. Ceci nous permet donc d'initialiser la récurrence.

On suppose maintenant, que l'hypothèse de récurrence soit vraie jusqu'au rang $d-1$. Soient $\mu_1, \cdots, \mu_l$ des nombres complexes qui vérifient l'égalité suivante :

$$\sum_{p=1}^{l} \mu_p \frac{t_1^{\varepsilon_{1,p}} t_2^{\varepsilon_{2,p}} \cdots t_d^{\varepsilon_{d,p}}}{(1+t_1^2)^{m_{1,p}} \cdots (1+t_d^2)^{m_{d,p}}} = \sum_{p=1}^{l} \mu_p \frac{t_2^{\varepsilon_{2,p}} t_3^{\varepsilon_{3,p}} \cdots t_d^{\varepsilon_{d,p}}}{(1+t_2^2)^{m_{2,p}} \cdots (1+t_d^2)^{m_{d,p}}} \frac{t_1^{\varepsilon_{1,p}}}{(1+t_1^2)^{m_{1,p}}} = 0.$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence au rang 1, et on obtient :

$$\sum_{A_{\varepsilon,m}} \mu_p \frac{t_2^{\varepsilon_{2,p}} t_3^{\varepsilon_{3,p}} \cdots t_d^{\varepsilon_{d,p}}}{(1+t_2^2)^{m_{1,p}} \cdots (1+t_d^2)^{m_{d,p}}} = 0,$$

où $A_{\varepsilon,m}$ est l'ensemble des entiers p tels que $(1+t_1^2)^{-m} t_1^{\varepsilon}$ apparaissent dans la fraction correspondante. Ces ensembles $A_{\varepsilon,m}$ forment une partition de $\{1, \cdots, l\}$. Ceci est vrai pour chaque $(d-1)$-uplet $(t_2, \cdots, t_d)$. Comme l'hypothèse de récurrence est supposée vraie au rang $d-1$, on obtient que μ_p est nul, quel que soit $p = 1, \cdots, l$.

Pour vérifier que la famille est génératrice, on peut utiliser une récurrence. Dans le cas d'une seule variable, si $f \in \mathcal{A}_\theta$, il peut s'écrire $f(X) = P(X)(1+X^2)^{-m}$ avec le degré de P $deg(P)$ qui vérifie $deg(P) \leq 2m$. On fait alors la division euclidienne de P par $(1+X^2)^m$ pour obtenir l'égalité $P(X) = q_1(X)(1+X^2)^m + r_1(X)$ avec $deg(q_1) = 0$ et $deg(r_1) \leq 2m-1$. Puis, on divise maintenant le reste r_1 que l'on divise par $(1+X^2)^{m-1}$ pour obtenir $r_1(X) = q_2(X)(1+X^2)^{m-1} + r_2(X)$ avec $deg(q_2) \leq 1$ et $deg(r_2) \leq 2m-3$. On réitère le procédé pour obtenir pour tout k vérifiant $1 \leq k \leq m-1$:

$$r_k(X) = q_{k+1}(X)(1+X^2)^{m-k} + r_{k+1}(X),$$

avec $deg(q_k) \leq 1$ et $deg(r_k) \leq 2(m-k)-1$. Finalement, on peut écrire le polynôme P sous la forme suivante :

$$P(X) = \sum_{k=1}^{m} q_k(X)(1+X^2)^{m-k+1} + r_m(X), \quad deg(q_k) \leq 1, \quad deg(r_m) \leq 1.$$

Et donc, on a bien l'écriture suivante pour f :

$$f(X) = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k(X)}{(1+X^2)^{k-1}} + \frac{r_m(X)}{(1+X^2)^m},$$

où les numérateurs des fractions rationnelles sont bien de degré inférieur à 1.

Pour passer du rang n au rang $n+1$, c'est la même chose que pour montrer que la famille est libre. Si $f \in \mathcal{A}_\theta$, il peut s'écrire $f(X_1, \cdots, X_{n+1}) = P(X_1, \cdots, X_{n+1})(1+X_1^2)^{-m_1} \cdots (1+X_{n+1}^2)^{-m_{n+1}}$. Puis, on regarde P comme un polynôme d'une variable X_1 à coefficient dans l'anneau des polynômes de $\mathbb{R}[X_2, \cdots, X_{n+1}]$. On utilise la méthode précédente (ceci est en effet possible car les polynômes $(1+X_1^2)^{-k}$ $(1 \leq k \leq m_1)$ par lesquels on divise sont unitaires dans $\mathbb{R}[X_2, \cdots, X_{n+1}][X_1]$) et l'hypothèse de récurrence au rang n (avec les variables $X_2, \cdots, X_{n+1}$) pour conclure sur l'aspect générateur de la famille de la proposition 2.2.2 dans l'algèbre $\mathcal{A}_\theta$. ■

2.2.3 Remarque : Si λ est une forme linéaire définie sur $\mathcal{A}_\theta$, λ est complétement déterminée par ses valeurs (via la proposition 2.2.2) :

$$a_{m_1,\cdots,m_n}^{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)} = \lambda\Big(\frac{t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2} \cdots t_n^{\varepsilon_n}}{(1+t_1^2)^{m_1} \cdots (1+t_n^2)^{m_n}}\Big),$$

qui sont appelées les « moments » de la forme λ.

2.2.4 Définition : On notera par $\Phi(t_1, \cdots, t_n) = [\Phi_{p,q}(t_1, \cdots, t_n)]_{1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq 4}$ la fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{4n}$ définie par la matrice suivante :

$$\Phi(t_1, \cdots, t_n) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1+t_1^2)} & \dfrac{t_1}{(1+t_1^2)} & \dfrac{t_1}{(1+t_1^2)} & \dfrac{t_1^2}{(1+t_1^2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{(1+t_n^2)} & \dfrac{t_n}{(1+t_n^2)} & \dfrac{t_n}{(1+t_n^2)} & \dfrac{t_n^2}{(1+t_n^2)} \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

La fonction Φ peut être vue comme ayant des valeurs dans l'ensemble $\mathcal{M}_{n\times 4}$ où $\mathcal{M}_{n\times 4}$ est l'espace des matrices à n lignes et 4 colonnes. Les deuxième et troisième colonnes de cette matrice sont identiques. On utilise ceci ultérieurement afin d'obtenir des informations sur le spectre joint d'un multi-opérateur borné (voir théorème 2.2.7).

2.2.5 Lemme : *La fonction Φ est une injection de $\mathbb{R}^n$. De plus, son image est donnée par l'égalité :*

$$\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{array}{c} x_{i,1} > 0, \quad x_{i,2} = x_{i,3} \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \\ x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2 + x_{i,4}^2 = 1 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \\ x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 = x_{i,1} \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \\ x_{i,4} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \end{array} \right\}. \tag{2.2.4}$$

Démonstration.

Pour prouver l'injectivité, il suffit de remarquer que si $[x_{p,q}]_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 4}$ est dans l'image de Φ, on a $[x_{p,q}]_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 4} = \Phi(t_1, \cdots, t_n)$ où $(t_1, \cdots, t_n)$ est donné par :

$$t_i = \frac{x_{i,2}}{x_{i,1}}, \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Pour ce qui est de la description de l'image de Φ, il suffit d'utiliser les deux égalités sur les fractions suivantes (pour tout $i = 1, \cdots, n$) :

$$\frac{1}{1+t_i^2} = \Big(\frac{1}{1+t_i^2}\Big)^2 + \Big(\frac{t_i}{1+t_i^2}\Big)^2 \quad \text{et} \quad \Big(\frac{1}{1+t_i^2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{t_i}{1+t_i^2}\Big)^2 + \Big(\frac{t_i^2}{1+t_i^2}\Big)^2 = 1.$$

■

On définit alors des applications $(\tilde{B_{p,q}})_{p,q}$ sur l'algèbre $\mathcal{A}_\theta$ grâce aux relations suivantes :

$$\mathcal{A}_\theta \ni f \to \tilde{B}_{p,q}(f) = \Phi_{p,q} f \in \mathcal{A}_\theta. \tag{2.2.5}$$

De l'égalité (2.2.4), on obtient que :

$$\sum_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 4} \Phi_{p,q}^2 = n. \tag{2.2.6}$$

2.2.6 Remarque : Si f est une fonction de $\mathcal{A}_\theta$, f peut toujours s'écrire sous la forme $P \circ \Phi$ où P est un polynôme de $4n$ variables. Cette représentation n'est clairement pas unique. Par exemple :

$$\frac{t_i^2}{(1+t_i^2)^2} = \frac{t_i^2}{1+t_i^2}\frac{1}{1+t_i^2} = \frac{t_i}{1+t_i^2}\frac{t_i}{1+t_i^2}.$$

De plus, il est évident que l'on peut choisir le polynôme P avec seulement $3n$ variables en utilisant la « symétrie » de $\Phi(t_1, \cdots, t_n)$.

2.2.7 Théorème : *Soit λ une forme linéaire définie sur $\mathcal{A}_\theta$. Soit H l'ensemble inclus dans $\mathbb{R}^N$, (avec $N = 4n$) donné par $H = \bigcup_{i=1}^n H_i$ si on pose :*

$$H_i = \Big\{x = [x_{p,q}] \quad ; \quad x_{i,1} = x_{i,2} = x_{i,3} = 0,\ x_{i,4} = 1, \quad ||x||^2 = n\Big\}, \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Si λ est semi-définie positive, il existe une première mesure ρ, à support dans $\mathbb{R}^n$, et une seconde ν à support dans H (où H est inclus $\mathbb{R}^N$ avec $N = 4n$) telles que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_N[X]$, on ait :

$$\lambda(P \circ \Phi) = \int_{\mathbb{R}^n} (P \circ \Phi) d\rho + \int_H P d\nu. \tag{2.2.7}$$

Démonstration.

Soit λ une forme linéaire semi-définie positive sur $\mathcal{A}_\theta$. On a pour tout multi-indice positif β : $\lambda(\theta^\beta|f^2|) \geq 0$. En effet, il suffit de remarquer que $\theta^\beta = \Phi_{1,1}^{\beta_1}\Phi_{2,1}^{\beta_2}\cdots\Phi_{n,1}^{\beta_n}$ et que chaque $\Phi_{i,1}$ $(i = 1, \cdots, n)$ peut s'écrire comme somme de deux carrés : $i = 1, \cdots, n$.

Par la transformation de Gelfand-Naimark, on définit un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ associé à la forme linéaire positive λ (voir (1.2.8) jusque (1.2.11)). On peut définir des opérateurs $(B_{p,q})_{p,q}$ sur $\mathcal{H}_\lambda$ de la même manière que l'on a défini les applications $(\tilde{B}_{p,q})_{p,q}$ sur $\mathcal{A}_\theta$. Ces opérateurs $(B_{p,q})_{p,q}$ sont, en fait, bornés, auto-adjoints et ils commutent entre eux. De plus, ils vérifient les propriétés suivantes :

$$B_{p,1}^2 + B_{p,2}^2 + B_{p,3}^2 + B_{p,4}^2 = I,\ p = 1, \cdots, n. \tag{2.2.8}$$

$$B_{p,1}^2 + B_{p,2}^2 = B_{p,1},\ p = 1, \cdots, n. \tag{2.2.9}$$

$$B_{p,2} = B_{p,3},\ p = 1, \cdots, n. \tag{2.2.10}$$

$$-I \leq B_{p,q} \leq I, \text{ pour } (p,q) \text{ tel que } 1 \leq p \leq n, \quad 2 \leq q \leq 3. \tag{2.2.11}$$

$$0 \leq B_{p,q} \leq I, \text{ pour } (p,q) \text{ tel que } 1 \leq p \leq n, \quad q \in \{1,4\}. \tag{2.2.12}$$

$$\sum_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 4} B_{p,q}^2 = nI. \tag{2.2.13}$$

Les propriétés (2.2.8), (2.2.9) et (2.2.10) proviennent des relations similaires de l'image $\Phi(\mathbb{R}^n)$ (voir (2.2.4)). Pour les autres relations, on prend deux éléments f et g dans $\mathcal{A}_\theta$, et on note par $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ ceux de $\mathcal{A}_\theta/\mathcal{N}$ définis par $f+\mathcal{N}$ et $g+\mathcal{N}$, respectivement. Alors, on obtient :

$$\langle B_{p,q}\tilde{f}, \tilde{g}\rangle_\lambda = \lambda(\Phi_{p,q}f.\bar{g}) = \lambda(f.\overline{\Phi_{p,q}g}) = \langle \tilde{f}, B_{p,q}\tilde{g}\rangle_\lambda.$$

On en conclut que les opérateurs $(B_{p,q})_{p,q}$ sont symétriques. Afin de simplifier les notations, on peut toujours supposer que p vaut 1. Pour les autres opérateurs, la preuve est la même à cause la « symétrie » de la famille.)

Comme nous avons l'égalité :

$$\Phi_{1,1}^2 + \Phi_{1,2}^2 + \Phi_{1,3}^2 + \Phi_{1,4}^2 = 1,$$

en utilisant la linéarité de λ et le fait que chaque polynôme $\Phi_{1,j}$ est à valeurs réelles, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} ||\tilde{f}||_\lambda^2 &= ||\Phi_{1,1}f+\mathcal{N}||_\lambda^2 + ||\Phi_{1,2}f+\mathcal{N}||_\lambda^2 + ||\Phi_{1,3}f+\mathcal{N}||_\lambda^2 + ||\Phi_{1,4}f+\mathcal{N}||_\lambda^2 \\ &= ||B_{1,1}\tilde{f}||_\lambda^2 + ||B_{1,2}\tilde{f}||_\lambda^2 + ||B_{1,3}\tilde{f}||_\lambda^2 + ||B_{1,4}\tilde{f}||_\lambda^2. \end{aligned}$$

On en déduit que les $B_{1,q}$, pour q dans $\{1, \cdots, 4\}$, sont des contractions, et donc en particulier des opérateurs bornés.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à prouver les relations (2.2.11), (2.2.12) et (2.2.13). Comme l'on sait que $\Phi_{1,1} = \Phi_{1,1}^2 + \Phi_{1,2}^2$, une fois de plus, en utilisant la linéarité de λ, on en déduit que :

$$\langle B_{1,1}\tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\lambda = \lambda(\Phi_{1,1} f\bar{f}) = \lambda(\Phi_{1,1}^2 f\bar{f}) + \lambda(\Phi_{1,2}^2 f\bar{f}) = ||B_{1,1}\tilde{f}||_\lambda^2 + ||B_{1,2}\tilde{f}||_\lambda^2 \geq 0.$$

De plus, comme $B_{1,1}$ est une contraction auto-adjointe, il s'ensuit l'inégalité : $0 \leq B_{1,1} \leq I$. Pour $B_{1,4}$ c'est exactement le même procédé qui fonctionne puisque $\Phi_{1,4}$ peut s'écrire $\Phi_{1,3}^2 + \Phi_{1,4}^2$. En utilisant la relation (2.2.8), on peut montrer que $B_{1,2}$ et $B_{1,3}$ satisfont à :

$$B_{1,2}^2 + B_{1,3}^2 \leq I.$$

Ceci revient à dire :

$$-I \leq B_{1,2} = B_{1,3} \leq I.$$

Enfin, pour ce qui est de (2.2.13), il nous suffit d'utiliser (2.2.6). Comme toutes ces égalités et inégalités sont vraies sur le quotient $\mathcal{A}_\theta/\mathcal{N}$ qui est un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\lambda$, ces relations sont également valables sur $\mathcal{H}_\lambda$ en utilisant la continuité des opérateurs.

On notera par B la famille commutative formée par les opérateurs auto-adjoints bornés $(B_{p,q})_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 4}$. On notera $\sigma(B)$ le spectre joint de B. Bien évidemment, $\sigma(B)$ est un sous-ensemble compact de $(\mathbb{R}^4)^n$. De plus, en utilisant la théorie de Gelfand, on voit que chaque élément du spectre joint est, soit inclus dans $\Phi(\mathbb{R}^n)$, soit inclus dans au moins un des H_i. Pour ceci, prenons un $x \in \sigma(B)$, et soit γ un caractère (forme linéaire multiplicative) associé à x. On notera par $(\gamma_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq 4}$ la famille $(\gamma(B_{i,j}))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq 4}$. En utilisant les propriétés (2.2.8), (2.2.9), (2.2.10) et (2.2.12), on montre que $x = (\gamma_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq 4}$ est dans $\Phi(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si chaque $\gamma_{i,1}$ est non nul ; si x n'est pas dans $\Phi(\mathbb{R}^n)$, il existe un entier i_0 dans $\{1, \cdots, n\}$ tel que $\gamma_{i_0,1} = 0$. Alors, en utilisant (2.2.9) $\gamma_{i_0,2} = \gamma_{i_0,3} = 0$ et en appliquant les relations (2.2.8) et (2.2.12), on obtient également que $\gamma_{i_0,4} = 1$. Par conséquent, x est dans H_{i_0}. Ceci se résume par l'inclusion :

$$\sigma(B) \subseteq \Phi(\mathbb{R}^n) \cup H, \; \Phi(\mathbb{R}^n) \cap H = \emptyset. \tag{2.2.14}$$

On définit alors deux boréliens σ_0 et σ_1 de $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} \sigma_0 = \sigma(B) \cap H, \\ \sigma_1 = \sigma(B) \cap \Phi(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Comme B est une famille commutative d'opérateurs auto-adjoints, B admet une mesure spectrale jointe E. On peut noter que σ_0 et σ_1 sont deux ensembles disjoints. Par eux, on définit deux mesures positives en posant pour tout ensemble τ de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} \nu(\tau) = \langle E(\tau \cap \sigma_0)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda. \\ \mu(\tau) = \langle E(\tau \cap \sigma_1)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda, \end{cases}$$

Par un changement de variables, on construit une troisième mesure positive ρ par les égalités :

$$\rho(\tau') = \mu(\Phi(\tau')), \quad \forall \tau' \text{ borélien de } \mathbb{R}^n.$$

On peut noter que ρ est bien une mesure puisque Φ est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\Phi(\mathbb{R}^n)$ par le lemme 2.2.5, et par conséquent on peut toujours écrire :

$$\rho(\tau') = \mu\Big([\Phi^{-1}]^{-1}(\tau')\Big).$$

Alors, nous obtenons :

$$\lambda(P \circ \Phi) = \langle P(B).\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} P.d\langle E.\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda.$$

De plus, on sait que :

$$\langle E(\tau)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda = \langle E(\tau \cap \sigma_0)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda + \langle E(\tau \cap \sigma_1)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda.$$

Par conséquent, $\lambda(P \circ \Phi)$ peut s'écrire :

$$\lambda(P \circ \Phi) = \int_{\Phi(\mathbb{R}^n)} P\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} P\, d\nu.$$

Comme ν est à support dans H et μ dans $\Phi(\mathbb{R}^n)$, cela revient à :

$$\lambda(P \circ \Phi) = \int_{\Phi(\mathbb{R}^n)} P\, d\mu + \int_H P\, d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} (P \circ \Phi)\, d\rho + \int_H P\, d\nu.$$

Et, par conséquent, on obtient bien la représentation désirée sous forme d'intégrales :

$$\lambda(P \circ \Phi) = \int_{\mathbb{R}^n} (P \circ \Phi)\, d\rho + \int_H P\, d\nu.$$

■

2.2.8 Corollaire : *Soit $(\tau_1, \cdots, \tau_m)$ un m-uplet de fractions à coefficients réels dans $\mathcal{A}_\theta$. Soit T_j un polynôme à $4n$ variables tel que $\tau_j = T_j \circ \Phi$, pour j dans $\{1, \cdots, m\}$. Supposons, enfin, que λ soit une forme linéaire semi-définie positive sur $\mathcal{A}_\theta$ telle que l'on ait : $\lambda(\tau_j |f^2|) \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \cdots, m\}$.*

Alors, on peut trouver deux mesures positives ρ et ν, à supports respectifs dans $\cap_j (T_j \circ \Phi)^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $\cap_j T_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$ telles que, pour tout polynôme P dans $\mathbb{C}_N[X]$, on ait :

$$\lambda(P \circ \Phi) = \int_I (P \circ \Phi)\, d\rho + \int_{H'} P\, d\nu, \tag{2.2.15}$$

où I et H' sont les ensembles $\bigcap_j (T_j \circ \phi)^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $H \cap \bigcap_j T_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$ respectivement.

Démonstration.

Comme $\lambda(\tau_j |f^2|)$ est positif pour tout entier $j \in \{1, \cdots, m\}$, on obtient que les opérateurs $(T_j(B))_j$ sont des opérateurs positifs également ; en effet :

$$\langle T_j(B)\tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\lambda = \langle T_j \circ \Phi \tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\lambda = \langle \tau_j \tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\lambda = \lambda(\tau_j |f|^2) \geq 0.$$

A nouveau, on va utiliser la théorie des caractères de GELFAND. Si γ en est un, on obtient en utilisant la linéarité et la multiplicativité que $T_j(\gamma(B)) = \gamma(T_j(B)) \geq 0$. On en déduit que $\gamma(B)$ est inclus dans $T_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$, et par conséquent, la mesure spectrale associée au spectre joint $\sigma(B)$ a son support inclus dans $\cap_j T_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$. ■

Maintenant que l'on a décrit les formes linéaires semi-définies positives sur l'algèbre $\mathcal{A}_\theta$, on peut utiliser cette décomposition en somme de deux intégrales par rapport à des mesures positives pour décrire la structure de certains polynômes strictement positifs.

On commencera par rappeler un lemme dû à M. PUTINAR et F.-H. VASILESCU (voir lemme 4.1 de [Pu-Vas2] qui formalise une idée de G. CASSIER dans [Cas2]).

2.2.9 Lemme (Putinar-Vasilescu 1999) : *Soit $\mathcal{S}$ un espace vectoriel réel, et soit $\mathcal{C}$ un cône positif convexe inclus dans $\mathcal{S}$ tel qu'il vérifie l'égalité $\mathcal{S} = \mathcal{C} - \mathcal{C}$. Supposons que l'on puisse écrire $\mathcal{C}$ sous la forme $\cup_{d\geq 1}\mathcal{C}_d$ où les $\mathcal{C}_d$ sont également des cônes convexes, tels que l'ensemble $\mathcal{S}_d = \mathcal{C}_d - \mathcal{C}_d$ soit un espace vectoriel de dimension finie, ceci pour tout entier $d \geq 1$.*

Notons par $int(\mathcal{C}_d)$ l'intérieur de $\mathcal{C}_d$ en tant que sous-ensemble de l'espace euclidien $\mathcal{S}_d$.

Supposons qu'il existe un élément $\xi \in \mathcal{C}_1$ qui vérifie, pour tout d strictement positif et pour toute forme linéaire non identiquement nulle de $\mathcal{S}_d^*$ qui est positive sur $\mathcal{C}_d$, $\varphi(\xi) > 0$.

Soit $r_0 \in \mathcal{S}_{d_0} \backslash int(\mathcal{C}_{d_0})$, où d_0 est un entier strictement positif; alors il existe une forme linéaire χ définie sur $\mathcal{S}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\chi(r_0) \leq 0$ et telle que χ soit strictement positive sur $int(\mathcal{C}_d)$ pour tout entier d plus grand que d_0.

En particulier, la restriction de la forme χ à $\mathcal{C}$ est positive.

2.2.10 Définition : Pour tout entier positif d, on définit l'espace vectoriel $\mathcal{F}_d$ en posant :

$$\mathcal{F}_d = \{g(t) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} t^\alpha \theta(t)^\beta \text{ tel que } \alpha \leq 2\beta \leq 4D\}, \quad D = (d, \cdots, d).$$

Si P est un polynôme défini sur $\mathbb{R}^n$, on notera par $\delta_j(P)$ le degré de P en tant que polynôme en une seule variable X_j à coefficients dans l'anneau euclidien $\mathbb{R}[X_1, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_n]$. De plus, on notera par $\delta(P)$ (et on l'appellera le *multi-degré* de P), le multi-indice suivant :

$$\delta(P) = \{\delta_1(P), \cdots, \delta_n(P)\}. \tag{2.2.16}$$

Soit $\mathcal{C}$ le cône positif engendré par les éléments de la forme r^2 ($r \in \mathcal{A}_\theta$) et $P_j \theta^{\gamma(P_j)/2} s^2$ ($s \in \mathcal{A}_\theta$), où les polynômes $P_1, \cdots, P_k$ sont réels et fixés à multi-degrés pairs.

De la même manière, on notera par Σ le cône positif inclus dans $\mathcal{C}$ engendré par les éléments de la forme r^2 ($r \in \mathcal{A}_\theta$).

Enfin, si P est un polynôme qui s'écrit $P(X) = \sum_\alpha g_\alpha X^\alpha$ tel que son multi-degré soit pair, on définit le polynôme $\tilde{P}$ en $3n$ variables par la formule :

$$\tilde{P}(X,Y,Z) = \sum_{\alpha} g_\alpha X^\beta Y^{\alpha-2\beta} Z^{\frac{\delta(P)}{2}+\beta-\alpha}, \tag{2.2.17}$$

le polynôme $\tilde{P}$ sera appelé dans cette section *polynôme associé à* P. De façon équivalente, on peut écrire $\tilde{P}$ sous la forme :

$$\tilde{P}(X,Y,Z) = Z^{\frac{\delta(P)}{2}} \sum_{\alpha} g_\alpha (\frac{X}{Z})^\beta (\frac{Y}{Z})^{\alpha-2\beta}, \tag{2.2.18}$$

où β est le multi-indice $([\frac{\alpha_1}{2}],\cdots,[\frac{\alpha_n}{2}])$ ($[.]$ représente la fonction partie entière). Dans la suite, ce polynôme $\tilde{P}$ sera composé à droite par la fonction Φ (en regardant $\tilde{P}$ comme un polynôme à $4n$ variables). Afin de bien comprendre la façon de composer, il est plus simple de réindexer les différentes variables. En se souvenant que chaque élément de $\Phi(\mathbb{R}^n)$ peut se mettre sous forme matricielle $x = [x_{p,q}]_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 4}$, on écrira $\tilde{P}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&\tilde{P}(X_{1,1},\cdots,X_{n,4})\\ &= \sum_{\alpha} g_\alpha X_{1,4}^{\beta_1}\cdots X_{n,4}^{\beta_n} X_{1,2}^{\alpha_1-2\beta_1}\cdots X_{n,2}^{\alpha_n-2\beta_n} X_{1,1}^{\frac{\delta_1(P)}{2}+\beta_1-\alpha_1}\cdots X_{n,1}^{\frac{\delta_n(P)}{2}+\beta_n-\alpha_n}.\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Cela signifie que les n-variables X, Y et Z vont jouer le rôle de $(\Phi_{1,4}(t),\cdots,\Phi_{n,4}(t))$, $(\Phi_{1,2}(t),\cdots,\Phi_{n,2}(t))$ et $(\Phi_{1,1}(t),\cdots,\Phi_{n,1}(t))$ respectivement. Alors un calcul simple permet de relier $\tilde{P}$ et P. Si on a P, alors :

$$P(t)\theta^{\frac{\delta(P)}{2}}(t) = \tilde{P}\circ\Phi(t), \quad \forall t\in\mathbb{R}^n. \tag{2.2.20}$$

Si on connait $\tilde{P}$, on peut retrouver P par :

$$\tilde{P}(t',t,1) = P(t), \quad \forall t\in\mathbb{R}^n, \tag{2.2.21}$$

où t' vaut $(t_1^2,\cdots,t_n^2)$.

On peut noter, enfin, que la formule (2.2.19) nous donne un moyen explicite de trouver $\tilde{P}$ pour un P donné.

2.2.11 Théorème : *Soit $(P_1,\cdots,P_k)$ un k-uplet de polynômes de multi-degrés pairs $2D_1,\cdots,2D_k$ respectivement. Supposons que P soit un polynôme strictement positif sur $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+)\setminus\{0\}$, de multi-degré $2D$. Si $\tilde{P}_1,\cdots,\tilde{P}_k,\tilde{P}$ sont les polynômes associés à $P_1,\cdots,P_k$ et P respectivement, et si ce dernier vérifie $\tilde{P}(t)>0$ pour tout t dans $H\cap\cap_{i=1}^k\tilde{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ où H a été défini au théorème 2.2.7 alors, il existe un multi-indice positif M et un nombre fini de polynômes à coefficients réels notés $\{q_l\}_{l\in L}$ et $\{q_{i,l}\}_{i\in\{1,\cdots,k\},l\in L'}$ tels que :*

$$P(t) = \theta(t)^{2M}(\sum_{l\in L} q_l^2(t) + \sum_{i=1}^k\sum_{l\in L'} P_i(t)q_{i,l}^2(t)), t\in\mathbb{R}^n, M\in\mathbb{Z}_+^n. \tag{2.2.22}$$

Démonstration.
On va commencer par montrer que l'on peut appliquer le lemme 2.2.9 et donc vérifier que toutes les hypothèses sont bien satisfaites. Pour ce faire, on pose $\mathcal{C}_d = \mathcal{C} \cap \mathcal{F}_d$ et $\mathcal{S}_d = \mathcal{C}_d - \mathcal{C}_d$. De manière évidente, $\mathcal{S}_d$ est un espace vectoriel. De plus, comme nous avons les inclusions $\mathcal{C}_d \subset S_d \subset \mathcal{F}_d$, $\mathcal{S}_d$ est de dimension finie. Pour prouver que $\mathcal{A}_\theta = \mathcal{C} - \mathcal{C}$, il suffit de remarquer que tout élément f de $\mathcal{S}$ peut s'écrire :

$$f = \frac{1}{4}\Big([f+1]^2 - [f-1]^2\Big).$$

L'ensemble $(\mathcal{C}_{d+1} \cap \mathcal{S}_d)$ est inclus dans $(\mathcal{C}_{d+1} \cap \mathcal{F}_d) = (\mathcal{C} \cap \mathcal{F}_{d+1} \cap \mathcal{F}_d)$. On en déduit que $(\mathcal{C}_{d+1} \cap \mathcal{S}_d) = (\mathcal{C} \cap \mathcal{F}_d) = \mathcal{C}_d$. De plus, grâce aux trois inclusions suivantes $(\mathcal{C}_{d+1} \cap \mathcal{S}_d) \subset \mathcal{C}_d$, $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{C}_{d+1}$ et $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{S}_d$, on obtient $(\mathcal{C}_{d+1} \cap \mathcal{S}_d) = \mathcal{C}_d$.

Il nous faut maintenant trouver un élément $\xi \in \mathcal{C}_1$ tel que, pour tout entier strictement positif d et pour toute forme linéaire non nulle φ dans $\mathcal{S}_d^*$ qui est positive sur $\mathcal{C}_d$, on ait $\varphi(\xi) > 0$.

Prenons $\xi = 1$, et fixons un entier naturel d. Soit φ une forme de $\mathcal{S}_d^*$ qui s'annule en ξ, $\varphi(\xi) = 0$. On va prouver que φ est identiquement nulle sur $\mathcal{S}_d$. Pour cela, il suffit de prouver que $\varphi = 0$ sur $\mathcal{C}$.

On définit la fonction $F^{2D}(t) = (1+t_1^2)^{2d} \cdots (1+t_n^2)^{2d}$; alors $F^{2D}(t)$ est une somme de carrés où apparaissent les monômes $t^{2\alpha} = t_1^{2\alpha_1} \cdots t_n^{2\alpha_n}$ pour tout α_i plus petit que $2d$ $(i = 0, \cdots, n)$. Alors, on obtient :

$$1 - \frac{t^{2\alpha}}{F^{2D}(t)} \in \mathcal{C}_d, \quad \forall \alpha \leq 2D.$$

Comme nous avons supposé que $\varphi(1) = 0$, on en déduit la positivité de $-\varphi[\frac{t^{2\alpha}}{F^{2D}(t)}] \geq 0$. Or on a également : $\varphi[\frac{t^{2\alpha}}{F^{2D}(t)}] = \varphi[(\frac{t^{\alpha}}{F^{D}(t)})^2] \geq 0$. En conclusion, cela démontre l'égalité suivante :

$$\varphi[\frac{t^{2\alpha}}{F^{2D}(t)}] = 0, \ \forall \alpha \leq 2D. \tag{2.2.23}$$

Soient $\alpha \leq 2D$ et $\beta \leq 2D$ deux multi-indices. Alors les fractions $\frac{t^\alpha}{F^D(t)}$ et $\frac{t^\beta}{F^D(t)}$ sont dans $\mathcal{F}_d$. Pour tout nombre $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi[(\frac{t^\alpha}{F^D(t)} + \mu\frac{t^\beta}{F^D(t)})^2] = \mu^2\varphi[\frac{t^{2\beta}}{F^{2D}(t)}] + 2\mu\varphi[\frac{t^{\alpha+\beta}}{F^{2D}(t)}] + \varphi[\frac{t^{2\alpha}}{F^{2D}(t)}] \geq 0.$$

Grâce à l'égalité (2.2.23), nous obtenons :

$$\varphi[\frac{t^{2\beta}}{F^{2D}(t)}] = \varphi[\frac{t^{2\alpha}}{F^{2D}(t)}] = 0.$$

Comme pour tout nombre réel μ, $\mu\varphi[\frac{t^{\alpha+\beta}}{F^{2D}(t)}]$ est positif, il en découle :

$$\varphi[\frac{t^{\alpha+\beta}}{F^{2D}(t)}] = 0, \quad \forall \alpha \leq 2D, \quad \forall \beta \leq 2D. \tag{2.2.24}$$

Si maintenant, on a $\alpha \leq 4D$, on découpe α en $\alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_1 \leq 2D$ et $\alpha_2 \leq 2D$. En appliquant le résultat précédent à α_1 et α_2 on obtient :

$$\varphi[\frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{F^{2D}(t)}] = \varphi[\frac{t^{\alpha}}{F^{2D}(t)}] = 0, \forall \alpha \leq 4D. \tag{2.2.25}$$

Il ne nous reste plus qu'à prouver que $\varphi[\frac{t^\alpha}{F^\beta(t)}]$ est nul quand $\alpha \leq 2\beta \leq 4D$. Pour ce faire, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on écrit $\beta_i = 2k_i + \varepsilon_i$, avec $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Alors, on peut donner les égalités :

$$\frac{t^\alpha}{F^\beta(t)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\alpha_i}}{F_i^{2k_i+\varepsilon_i}(t)}, \qquad \text{où } F_i(t) = 1 + t_i^2,$$

$$\frac{t^\alpha}{F^\beta(t)} = \prod_{i=1,\varepsilon_i=0}^{n} \frac{t_i^{\alpha_i}}{F_i^{2k_i+\varepsilon_i}}. \prod_{i=1,\varepsilon_i=1}^{n} \frac{t_i^{\alpha_i}}{F_i^{2k_i+\varepsilon_i}(t)}.$$

Soit I l'ensemble des entiers i tels que $\varepsilon_i = 0$, et soit I' l'ensemble des entiers i tels que $\varepsilon_i = 1$. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on décompose en deux cas :

(a) Si $i \in I$, de l'inégalité $\alpha \leq 2\beta \leq 4D$, on obtient $\alpha_i \leq 4k_i \leq 4d$. On a alors :

$$\frac{t_i^{\alpha_i}}{F^{(2k_i)e_i}(t)} = \frac{t_i^{\alpha_i} F^{(2d-2k_i)e_i}(t)}{F^{(2d)e_i}(t)},$$

où le degré du numérateur est $\alpha_i + 2(2d - 2k_i)$, qui est toujours inférieur à $4d$.

(b) Si $i \in I'$, grâce à $\alpha \leq 2\beta \leq 4D$, on en déduit $\alpha_i \leq 4k_i + 2 \leq 4d$.

$$\frac{t_i^{\alpha_i}}{F^{(2k_i+1)e_i}(t)} = \frac{t_i^{\alpha_i} F^{e_i}(t)}{F^{(2k_i+2)e_i}(t)}.$$

Comme $2k_i + 1 \leq 2d$, $2k_i + 2 \leq 2d$, et on voit :

$$\frac{t_i^{\alpha_i}}{F^{(2k_i+1)e_i}(t)} = \frac{t_i^{\alpha_i} F^{e_i}(t) F^{(2d-2k_i-2)e_i}(t)}{F^{(2d)e_i}(t)},$$

où le degré du numérateur est $\alpha_i + 2 + 2.(2d - 2k_i - 2)$, ce qui n'excède pas $4d$ également.

Si on utilise, maintenant, l'écriture :

$$\frac{t^\alpha}{F^\beta(t)} = \frac{t^\alpha F^{2D-\beta}(t)}{F^{2D}(t)},$$

quand $\alpha \leq 2\beta \leq 4D$, on peut utiliser les égalités (2.2.25) pour en conclure :

$$\varphi[\frac{t^\alpha}{F^\beta(t)}] = 0 \text{ quand } \alpha \leq 2\beta \leq 4D. \tag{2.2.26}$$

Par conséquent φ est identiquement nul sur $\mathcal{F}_d$. On peut donc appliquer le lemme 2.2.9 à notre cadre.

Nous avons clairement $P\theta^{\delta(P)/2}$ qui est inclus dans $\mathcal{F}_d = \mathcal{S}_d$. Supposons que $P\theta^{\delta(P)/2}$ ne soit pas dans $Int(\mathcal{C}_d)$; par le lemme 2.2.9, il existe alors une forme linéaire Ψ

définie sur $\mathcal{A}_\theta$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que sa restriction à $\mathcal{C}$ soit positive et telle que $\Psi(P\theta^{\delta(P)/2})$ soit négative. Grâce à la positivité de Ψ sur $\mathcal{C}$, on peut appliquer le corollaire 2.2.8. Ceci entraîne qu'il existe deux mesures positives ρ et ν telles que l'on ait :

$$\Psi(P\theta^{\delta(P)/2}) = \int_I \tilde{P} \circ \Phi(t)\, d\rho(t) + \int_{H'} \tilde{P}(x)\, d\nu(x), \tag{2.2.27}$$

où $\tilde{P} \circ \Phi = P\theta^{\delta(P)/2}$, $I = \cap_j P_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $H' = H \cap \bigcap_j \tilde{P}_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Si le support de ν est vide, alors le spectre $\sigma(B)$ est complètement inclus dans l'image par Φ du support *supp*(ρ) de ρ, qui est un ensemble compact non vide. Mais on a supposé que P était strictement positif sur l'ensemble I, donc il en est de même pour la fonction $P\theta^{\delta(P)/2}$ qui est $\tilde{P} \circ \Phi$. Dans ces conditions, on a :

$$\int_I \tilde{P} \circ \Phi(t)\, d\rho(t) > 0.$$

Si ν a un support non vide, comme nous avons supposé que $\tilde{P}(x) > 0$ sur *supp*(ν), on a :

$$\int_{H'} \tilde{P}(x)\, d\nu(x) > 0.$$

Les deux mesures ne peuvent avoir toutes les deux un support vide simultanément car $\sigma(B)$ est non vide. Dans tous les cas, on obtient :

$$0 \geq \Psi(P\theta^{\frac{\delta(P)}{2}}) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P} \circ \Phi\, d\rho + \int_H \tilde{P}\, d\nu > 0. \tag{2.2.28}$$

Comme ceci est clairement impossible, on en déduit que $P\theta^{\delta(P)/2}$ est dans l'intérieur d'au moins un $\mathcal{C}_d$, et en particulier dans un $\mathcal{C}_d$. Par conséquent, il existe un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{A}_\theta$, $\{q_l\}_{l\in L}$ et $\{q_{i,l}\}_{i\in\{1,\cdots,k\},l\in L'}$, tel que :

$$P(t)\theta(t)^{\delta(P)/2} = \sum_{l\in L} q_l^2(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{l\in L'} P_i(t)\theta(t)^{\delta(P_i)/2} q_{i,l}^2(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui revient à écrire que :

$$P(t) = \sum_{l'\in L_1} q_{1,l'}^2(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{l'\in L_1'} P_i(t)\theta(t)^{\delta(P_i)/2} q_{1,i,l'}^2(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.29}$$

où les $\{q_{1,l'}\}_{l'\in L_1}$ et les $\{q_{1,i,l'}\}_{i\in\{1,\cdots,k\},l'\in L_1'}$ ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{A}_\theta$ (puisque le fait de multiplier par $\theta(t)^{\delta(P)/2}$ ne nous permet plus de dire que ces fractions sont nécessairement bornées), mais leurs dénominateurs restent de la forme $[\theta(t)^F]^{-1}$ ($F \in \mathbb{Z}_+^n$). En mettant tout au même dénominateur, en utilisant le fait que chaque $\delta(P_i)$ est pair, on obtient :

$$P(t) = \theta(t)^{2M}(\sum_{l'\in L'} r_{l'}^2(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{l'\in L'} P_i(t) r_{i,l'}^2(t)), t \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.30}$$

où les $\{r_{l'}, r_{i,l'}\}_{l'\in L', i\in\{1,\cdots,k\}}$ sont polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. ■

2.2.12 Corollaire : *Si P est un polynôme en n variables tel que son polynôme associé $\tilde{P}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, alors il existe un multi-indice M dans $\mathbb{Z}_+^n$ tel que l'on ait :*

$$P(t) = \theta(t)^{2M}\{\sum_{l\in L} q_l^2(t)\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^n,$$

où les $\{q_l\}_{l\in L}$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.
Comme $\tilde{P}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, P est strictement positif sur $\mathbb{R}^n$ grâce à l'égalité (2.2.21). En particulier le multi-degré de P doit être pair. On peut donc appliquer le résultat précédent avec pour polynômes $(P_j)_j$ le monôme identiquement nul. ■

Le résultat suivant montre que, sous certaines conditions sur (uniquement) les coefficients dominants, on peut avoir une représentation du type de celle du théorème 2.2.11.

2.2.13 Théorème : *Soit P un polynôme strictement positif sur $\mathbb{R}^n$ tel que l'on puisse l'écrire sous la forme :*

$$P(t) = (\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\}} b_{\varepsilon M} t^{2\varepsilon M}) + Q(t),$$

où les réels $b_{\varepsilon M}$ sont strictement positifs pour tout ε . Si $2M = (2m_1, \cdots, 2m_n)$ est le multi-degré de P, on supposera que $\delta(Q) < 2M$.

Alors, il existe un multi-indice N dans $\mathbb{Z}_+^n$ tel que l'on ait :

$$P(t) = \theta^{2N}(t)\{\sum_{l\in L} q_l^2(t)\}, \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

où les $(q_l)_{l\in L}$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.
Soit $\delta(P)$ le multi-degré de P, $\delta(P) = (2m_1, \cdots, 2m_n)$. Alors la fraction $P(t)\theta^{\frac{\delta(P)}{2}}(t)$ est dans l'algèbre $\mathcal{A}_\theta$. Soit Σ le cône positif défini au début de la section. Comme dans le théorème 2.2.11, on peut utiliser le lemme 2.2.9 en posant $\Sigma_d = \mathcal{F}_d \cap \Sigma$. Supposons que $P(t)\theta^{\delta(P)/2}(t)$ ne soit pas dans $Int(\Sigma_d)$, alors il existe une forme linéaire Ψ de $\mathcal{A}_\theta$ dans $\mathbb{C}$ telle que sa restriction à Σ soit positive et telle que $\Psi(P\theta^{\delta(P)/2})$ soit négative.

Grâce à la positivité de Ψ sur Σ, le théorème 2.2.7 est applicable. Ceci entraîne qu'il existe deux mesures positives ρ et ν telles que l'on ait :

$$\begin{aligned}\Psi(P\theta^{\delta(P)/2}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}\circ\Phi(t)\, d\rho(t) + \int_H \tilde{P}(x)\, d\nu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P(t)\theta^{\delta(P)/2}(t)\, d\rho(t) + \int_H \tilde{P}(x)\, d\nu(x).\end{aligned}$$

Si $supp(\rho)$ n'est pas vide, alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(t)\theta^{\delta(P)/2}(t)\, d\rho(t) > 0.$$

Dans le cas contraire, forcément nous avons $supp(\nu) \neq \varnothing$; soit $\zeta \in supp(\nu)$, $\zeta \in (\mathbb{R}^4)^n$. Alors, il existe un entier j_0 dans $\{1, \cdots, n\}$ tel que :

$$(\zeta_{j_0,1}, \zeta_{j_0,2}, \zeta_{j_0,3}, \zeta_{j_0,4}) = (0, 0, 0, 1) \tag{2.2.31}$$

(de la décomposition de $\sigma(B)$ en deux parties disjointes incluses respectivement dans $\Phi(\mathbb{R}^n)$ et dans H). Par un changement d'indices, on peut toujours supposer que $j_0 = 1$. On notera par M' le multi-indice $(m_2, \cdots, m_n)$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} P(t)\theta^{\frac{\delta(P)}{2}}(t) &= \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\}} b_{\varepsilon M} t^{2\varepsilon M}\theta^{\frac{\delta(P)}{2}}(t) + \theta^{\frac{\delta(P)}{2}}(t)Q(t). \\ &= \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}\setminus\{0\}} b_{0,\varepsilon' M'} t^{(0,2\varepsilon' M')}\theta^{\frac{\delta(P)}{2}}(t) \\ &\quad + \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} b_{m_1,\varepsilon' M'} t_1^{2m_1} t^{(0,2\varepsilon' M')}\theta^{\frac{\delta(P)}{2}}(t) + \theta^{\frac{\delta(P)}{2}}(t)Q(t). \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Alors, en utilisant la formule (2.2.19) on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x) &= \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}\setminus\{0\}} b_{0,\varepsilon' M'} (x_{1,1})^{m_1} (\hat{x}^1)^{\varepsilon' M'} \\ &\quad + \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} b_{m_1,\varepsilon' M'} (x_{1,4})^{m_1} (\hat{x}^1)^{\varepsilon' M'} + x_{1,1}Q_1(x) \,+\, x_{1,2}Q_2(x), \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

avec la notation $(\hat{x}^1)^{\varepsilon' M'} = \prod_{j=2}^n x_{j,4}^{\varepsilon_j m_j} x_{j,1}^{(1-\varepsilon_j)m_j}$. Comme nous avons supposé que le quadruplet $(\zeta_{1,1}, \zeta_{1,2}, \zeta_{1,3}, \zeta_{1,4}) = (0, 0, 0, 1)$, on obtient :

$$\tilde{P}(\zeta) = \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} b_{m_1,\varepsilon' M'} (\hat{\zeta}^1)^{\varepsilon' M'},$$

avec la même notation $(\hat{\zeta}^1)^{\varepsilon' M'} = \prod_{j=2}^n \zeta_{j,4}^{\varepsilon_j m_j}\ \zeta_{j,1}^{(1-\varepsilon_j)m_j}$.

Soit b le minimum de l'ensemble $\{b_{m_1,\varepsilon' M'}, \varepsilon' \in \{0,1\}^{n-1}\}$. Comme tous les nombres réels $\zeta_{j,4}$ et $\zeta_{j,1}$ sont positifs, on minore :

$$\tilde{P}(\zeta) \geq b \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} (\hat{\zeta}^1)^{\varepsilon' M'} = b \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} \prod_{j=2}^n \zeta_{j,4}^{\varepsilon_j m_j} \quad \zeta_{j,1}^{(1-\varepsilon_j)m_j}. \tag{2.2.34}$$

On peut remarquer que dans la somme $\sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} \prod_{j=2}^n \zeta_{j,4}^{\varepsilon_j m_j}\ \zeta_{j,1}^{(1-\varepsilon_j)m_j}$ tous les éléments de la forme $\prod_{j=2}^n \zeta_{j,*_j}^{m_j}$ apparaissent une fois, où $*_j$ prend les valeurs 1 et 4, donc cette expression peut également s'écrire :

$$\sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} \prod_{j=2}^n \zeta_{j,4}^{\varepsilon_j m_j}\ \zeta_{j,1}^{(1-\varepsilon_j)m_j} = \prod_{j=2}^n (\zeta_{j,1}^{m_j} + \zeta_{j,4}^{m_j}).$$

Par conséquent, on obtient :

$$\tilde{P}(\zeta) \geq b \prod_{j=2}^{n} (\zeta_{j,1}^{m_j} + \zeta_{j,4}^{m_j}). \tag{2.2.35}$$

Enfin, puisque $\zeta_{j,1}$ et $\zeta_{j,4}$ sont positifs et ne peuvent s'annuler simultanément, pour tout entier j (comme ζ est dans le spectre de B, en utilisant (2.2.8), (2.2.9) et (2.2.12), on sait que si $\zeta_{j,1}$est nul on a $\zeta_{j,4} = 1$), on obtient $\tilde{P}(\zeta) > 0$, ce qui entraîne bien sûr :

$$\int_H \tilde{P}\, d\nu > 0.$$

Comme les deux supports ne peuvent être vides simultanément, on obtient :

$$0 \geq \Psi(P\theta^{\frac{\delta(P)}{2}}) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P} \circ \Phi \, d\rho + \int_H \tilde{P}\, d\nu > 0,$$

avec $\tilde{P} \circ \Phi = P\theta^{\delta(P)/2}$. Ceci étant clairement impossible, on en déduit que $P\theta^{\delta(P)/2}$ est dans l'intérieur d'un des cônes Σ_d et, en particulier, dans un Σ_d. Par conséquent, il existe un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{A}_\theta$, notés $\{q_l\}_{l\in L}$, tels que :

$$P(t)\theta(t)^{\delta(P)/2} = \sum_{l\in L} q_l^2(t), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

En conclusion, il existe un nombre fini d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, $\{q'_{l'}\}_{l'\in L'}$, vérifiant :

$$P(t) = \theta^{2N}(t) \sum_{l'\in L'} q_{l'}^{\prime 2}(t), \quad t \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.36}$$

Ceci achève la démonstration. ■

Le théorème 2.2.13 nous donne une représentation de polynômes strictement positifs sur $\mathbb{R}^n$, où nous ne demandons pas des conditions de positivité sur le polynôme associé. Ce résultat peut être vu comme un cas particulier du théorème d'E. Artin qui répond au $17^{ième}$ problème de Hilbert (posé à Paris en 1900).

2.2.14 Exemple : Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, un des exemples les plus simples de polynômes strictement positifs qui ne peut s'écrire comme somme de carrés de polynômes est celui trouvé par Motzkin en 1967 :

$$x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + 1.$$

On pose le polynôme suivant :

$$P(x_1, x_2) = x_1^6 x_2^6 + x_1^6 + x_2^6 + x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + 1.$$

Un calcul simple nous donne :

$$\tilde{P}(X, Y, Z) = X_1^3 X_2^3 + X_1^3 Z_2^3 + Z_1^3 X_2^3 + X_1^2 Z_1 X_2 Z_2^2 + X_1 Z_1^2 X_2^2 Z_2 - X_1 Z_1^2 X_2 Z_2^2 + Z_1^3 Z_2^3.$$

En particulier, $\tilde{P}(X,Y,0) = X_1^3 X_2^3$, donc $\tilde{P}$ ne vérifie pas les conditions du corollaire 2.2.12. Néanmoins, en utilisant le théorème précédent 2.2.13, P est dans le cône positif Σ, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire comme somme de fractions rationnelles avec des dénominateurs de la forme $[\theta^F]^{-1}$ avec F dans $\mathbb{Z}_+^2$.

La proposition suivante généralise le théorème 2.2.13, la démonstration utilisée en est très similaire. L'avantage du théorème 2.2.13 est que nous avons un exemple concret de décomposition de P qui convient alors que, dans ce qui suit, on suppose qu'il existe une « bonne décomposition. »

2.2.15 Proposition : *Soit $(P_1, \cdots, P_m)$ un m-uplet de polynômes en n variables, positifs sur $\mathbb{R}^n$. Soient g_0 et g_1 deux polynômes tels que $\delta(g_0) < \delta(g_1)$. Supposons que le polynôme $\tilde{g_1}$ associé à g_1 vérifie $\tilde{g_1}(x) > 0$ pour tout x dans H' (H' défini au corollaire 2.2.8). Si $P = g_0 + g_1$ est strictement positif sur $\bigcap_{k=1}^m P_k^{-1}(\mathbb{R}^+)$, alors il existe K dans $\mathbb{Z}_+^n$ tel que :*

$$P(t) = \theta(t)^{2K}\{\sum_{l\in L} q_l^2(t) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l\in L'_k} P_k(t) q_{l,k}^2(t)\}, t \in \mathbb{R}^n,$$

où les q_l et les $q_{l,k}$ sont des polynômes.

Démonstration.
C'est la même méthode que celle du théorème 2.2.13. Si $P \notin Int(\mathcal{C}_d)$, il existe une forme linéaire λ sur $\mathcal{S}$ telle que l'on ait :

$$\lambda(P\theta^{\delta(P)/2}) = \int_I \tilde{P} \circ \Phi d\rho + \int_{H'} \tilde{P} d\nu = \int_I P\theta^{\delta(P)/2} d\rho + \int_{H'} \tilde{P} d\nu$$

Si on a $supp(\rho) \neq \emptyset$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_I P\theta^{\delta(P)/2} d\rho > 0,$$

par le corollaire 2.2.8. Or,

$$\tilde{P} = \sum_{\alpha} Z^{\delta(P)/2} \sum c_\alpha (\frac{X}{Z})^\beta (\frac{Y}{Z})^{\alpha - 2\beta}, \tag{2.2.37}$$

si on utilise la notation habituelle pour P, comme $P = g_0 + g_1$, on a $\tilde{P} = \tilde{g_1} + Q$ où

$$Q = \sum_{\varepsilon_i \in \{1,2\}\,;\, i=1,\cdots,n} x_{1,\varepsilon_1} \cdots x_{n,\varepsilon_n} Q_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}(x).$$

Donc si ζ est dans l'ensemble $\sigma(B) \setminus \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{P}(\zeta) = \tilde{g_1}(\zeta) > 0$ car, par le théorème 2.2.8, $\zeta \in H'$. Dans ce cas, on obtient :

$$\int_{H'} \tilde{P} d\nu > 0.$$

Enfin, on conclut comme dans le théorème 2.2.13. ∎

2.2.16 Remarques :

(1) La méthode que nous avons utilisée ici pour la représentation de polynômes positifs sur des ensembles semi-algébriques se généralise au cas des polynômes positifs sur un fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$. Il suffit de reprendre l'idée de la section 1 du chapitre I, c'est-à-dire travailler avec une famille dénombrable de polynômes plutôt qu'une famille finie comme cela a été le cas dans toute cette section.

(2) Afin de ne pas trop compliquer les notations et, en accord avec les résultats parus dans [De], nous nous sommes seulement occupé de fractions avec des dénominateurs du type :

$$(1+t_1^2)^{\beta_1}\cdots(1+t_n^2)^{\beta_n}, \quad \beta_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i=1,\cdots,n.$$

Mais, comme cela a été le cas dans la section qui traite du problème des moments non bornés, on aurait pu travailler sur des fractions avec des dénominateurs plus compliqués. L'inconvénient aurait alors été de donner des exemples concrets de polynômes vérifiant les conditions des théorèmes trouvés.

(3) On peut remarquer que les méthodes utilisées nous permettent de contrôler les puissances apparaissant dans les dénominateurs des fractions qui interviennent dans les décompositions.

Jusqu'à présent, nous nous sommes occupés de polynômes de multi-degrés pairs. On peut donner des représentations pour des polynômes de multi-degrés quelconques, mais à ce moment là, nous ne pourrons pas uniquement utiliser des fractions rationnelles mais nous serons amené à introduire une algèbre de fractions où les dénominateurs seront du type suivant :

$$(1+t_1^2)^{\beta_1/2}\cdots(1+t_n^2)^{\beta_n/2}, \quad \beta_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i=1,\cdots,n.$$

Les preuves seront semblables à celles déjà utilisées dans cette section.

2.2.17 Définition : Pour tout multi-indice $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ dans $\mathbb{Z}_+^n$, on définit les fonctions Δ^β sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par les relations :

$$\Delta^\beta(t)=\Delta_1^{\beta_1}(t)\cdots\Delta_n^{\beta_n}(t), \quad \text{où} \quad \Delta_i(t)=(1+t_i^2)^{-1/2}, \quad t\in\mathbb{R}^n.$$

On définit comme précédemment l'algèbre $\mathcal{A}_\Delta$ comme étant l'ensemble des fractions bornées avec des dénominateurs de la forme : $[\Delta^\beta(t)]^{-1}$. Alors la fonction Ψ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n\times 2}$ sera donnée par la formule :

$$\Psi(t_1,\cdots,t_n)=[\Psi_{p,q}(t_1,\cdots,t_n)]_{1\le p\le n,1\le q\le 2}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1+t_1^2)^{1/2}} & \dfrac{t_1}{(1+t_1^2)^{1/2}} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{(1+t_n^2)^{1/2}} & \dfrac{t_n}{(1+t_n^2)^{1/2}} \end{bmatrix}. \tag{2.2.38}$$

2.2.18 Remarques :

(1) Comme dans le lemme 2.2.5, la fonction Ψ est injective sur $\mathbb{R}^n$. En effet, si on a $x = (x_{p,q})_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 2} \in \Psi(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire $x = \Psi(t)$ avec $t = (x_{1,2}/x_{1,1}, \cdots, x_{n,2}/x_{n,1})$. De plus on peut décrire complètement l'image, $\Psi(\mathbb{R}^n)$, de Ψ :

$$\Psi(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{array}{c} x = (x_{p,q})_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 2}, \\ x_{i,1} > 0, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \\ x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 = 1, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\} \end{array} \right\}. \tag{2.2.39}$$

On définit, sur $\mathcal{A}_\Delta$, des applications linéaires $(C_{p,q})_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 2}$ en posant :

$$\mathcal{A}_\Delta \ni f \to C_{p,q}(f) = \Psi_{p,q}.f \in \mathcal{A}_\Delta.$$

(2) On peut associer à chaque polynôme P, un second $\hat{P}$ qui est homogène en chaque variable : si on écrit $P(X) = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha$, son *polynôme homogène associé* sera :

$$\hat{P}(Z, X) = Z^{\delta(P)} \sum_\alpha c_\alpha (\frac{X}{Z})^\alpha = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha Z^{\delta(P)-\alpha} = Z^{\delta(P)} P(\frac{X}{Z}). \tag{2.2.40}$$

On peut relier les polynômes P et $\hat{P}$ par les deux égalités suivantes :

$$\hat{P}(1, t) = P(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.41}$$

$$\hat{P} \circ \Psi(t) = P(t)\Delta^{\delta(P)}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.42}$$

(3) Les relations (2.2.40) et (2.2.41) nous montrent que l'on peut envoyer chaque polynôme dans $\mathcal{A}_\Delta$ via son polynôme homogène associé et une composition par Ψ. Inversement, chaque élément f de $\mathcal{A}_\Delta$ peut s'écrire sous la forme $P_f \circ \Psi$ pour un certain polynôme P_f en $2n$ variables (sa représentation peut ne pas être unique). Cette dernière remarque nous autorise à voir que le théorème suivant est en fait valable sur tout $\mathcal{A}_\Delta$.

2.2.19 Théorème : *Soit λ une forme liéaire semi-définie positive sur $\mathcal{A}_\Delta$, telle que $\lambda_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}(*) = \lambda(\Delta^{\varepsilon_1 e_1+\cdots+\varepsilon_n e_n} *)$ soient aussi semi-définies positives, pour tout $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ dans $\{0,1\}^n$. Alors il existe une mesure ρ, à support inclus dans $\mathbb{R}^n$, et une seconde ν, à support inclus dans G, telles que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, on ait :*

$$\lambda(P \circ \Psi) = \int_{\mathbb{R}^n} (P \circ \Psi) d\rho + \int_G P d\nu. \tag{2.2.43}$$

où G est l'ensemble $\bigcup_{i=1}^n G_i$ avec $G_i = G_i^- \cup G_i^+$,

$$G_i^- = \{x = (x_{p,q}); x_{i,1} = 0, x_{i,2} = -1, ||x||^2 = n\}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

$$G_i^+ = \{x = (x_{p,q}); x_{i,1} = 0, x_{i,2} = +1, ||x||^2 = n\}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Démonstration :

On utilise la construction de Gelfand et Naimark. Soit λ une forme comme dans l'énoncé. Alors nous avons $\lambda(\Delta^\beta|f|^2) \geq 0$ grâce aux conditions de positivité des formes linéaires $\lambda_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}(*)$. Soit $\mathcal{H}_\lambda$ l'espace de HILBERT associé à λ dans la construction de GELFAND et NAIMARK. On définit les applications $(\hat{C}_{p,q})_{1\leq p\leq n, 1\leq q\leq 2}$ sur $\mathcal{H}_\lambda$ comme l'ont été les $(C_{p,q})_{1\leq p\leq n,1\leq q\leq 2}$ sur $\mathcal{A}_\Delta$; les opérateurs $(\hat{C}_{p,q})_{1\leq p\leq n,1\leq q\leq 2}$ sont tous bornés et auto-adjoints. De plus, cette famille $\hat{C}$ est commutative et vérifie :

$$\hat{C}_{p,1}^2 + \hat{C}_{p,2}^2 = I, \text{ for } p \text{ in } \{1, \cdots, n\}. \tag{2.2.44}$$

$$0 \leq \hat{C}_{p,1} \leq I, \text{ for } 1 \leq p \leq n. \tag{2.2.45}$$

$$\sum_{1\leq p\leq n,1\leq q\leq 2} \hat{C}_{p,q}^2 = nI. \tag{2.2.46}$$

Les propriétés (2.2.44) et (2.2.46) se déduisent directement de celles des éléments de $\Psi(\mathbb{R}^n)$. Pour ce qui est des autres, on prend deux éléments f et g dans $\mathcal{A}_\Delta$, et on note par $\hat{f}$ et $\hat{g}$ les éléments $f + \mathcal{N}$ et $g + \mathcal{N}$ de $\mathcal{A}_\Delta/\mathcal{N}$, respectivement. Alors, on obtient :

$$\langle \hat{C}_{p,q}\hat{f}, \hat{g}\rangle_\lambda = \lambda(\Psi_{p,q}f.\bar{g}) = \lambda(f.\overline{\Psi_{p,q}g}) = \langle \hat{f}, \hat{C}_{p,q}\hat{g}\rangle_\lambda.$$

Ceci entraîne que tous les $\hat{C}_{p,q}$ sont effectivement des opérateurs symétriques. On sait également l'égalité :

$$\Psi_{p,1}^2 + \Psi_{p,2}^2 = 1.$$

Ceci entraîne, en utilisant la linéarité de λ et le fait que chaque $\Psi_{p,q}$ est à valeurs réelles, que l'on obtient la relation :

$$\begin{aligned} ||\hat{f}||_\lambda^2 &= ||\Psi_{p,1}f + \mathcal{N}||_\lambda^2 + ||\Psi_{p,2}f + \mathcal{N}||_\lambda^2. \\ &= ||\hat{C}_{p,1}\hat{f}||_\lambda^2 + ||\hat{C}_{p,2}\hat{f}||_\lambda^2. \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Donc, on en déduit que chaque opérateur $\hat{C}_{p,q}$ est une contraction. De plus, la propriété (2.2.45) provient de la contractivité et de l'hypothèse de positivité des formes linéaires $\lambda_{1,0,\cdots,0}, \cdots, \lambda_{0,\cdots,0,1}$. Comme toutes ces identités et inégalités sont vraies sur $\mathcal{A}_\Delta/\mathcal{N}$, qui est un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\lambda$, ces relations restent vraies sur $\mathcal{H}_\lambda$, grâce à la continuité des opérateurs.

Soit $\sigma(\hat{C})$ le spectre joint de la famille commutative d'opérateurs $(\hat{C}_{p,q})_{1\leq p\leq n,1\leq q\leq 2}$ auto-adjoints ; $\sigma(\hat{C})$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{2n}$. Alors, grâce à la théorie de GELFAND, chaque élément de ce spectre joint est inclus dans $\Psi(\mathbb{R}^n)$ ou dans au moins un G_i (cela dépend du fait de la positivité ou de la stricte positivité de tous les $\gamma(\hat{C}_{p,1})$ où γ est un caractère). On divise $\sigma(\hat{C})$ en deux sous-ensembles boréliens disjoints : $\sigma_0 = \sigma(\hat{C}) \cap \Psi(\mathbb{R}^n)$ et $\sigma_1 = \sigma(\hat{C}) \cap G$. Puis, on introduit des mesures positives grâce à ces sous-ensembles :

$$\left\{ \begin{array}{c} \nu(\tau) = \langle E(\tau \cap \sigma_0)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda, \\ \mu(\tau) = \langle E(\tau \cap \sigma_1)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\lambda, \\ \rho(\tau') = \mu(\Psi(\tau')), \end{array} \right. \tag{2.2.48}$$

pour chaque paire (τ,τ') (τ dans la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{2n}$ et τ' dans celle de $\mathbb{R}^n$), où E est la mesure spectrale associée à la famille commutative $\hat{C}$. Alors, on a :

$$\lambda(P\circ\Psi) = \langle P(\hat{C})\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^{2n}} P d\langle E.\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle_\lambda.$$

Ceci implique l'égalité :

$$\lambda(P\circ\Psi) = \int_{\Psi(\mathbb{R}^n)} P\,d\mu + \int_G P\,d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} (P\circ\Psi)\,d\rho + \int_G P\,d\nu.$$

■

Si l'on demande des conditions de positivités supplémentaires, on peut connaître plus précisément les supports des deux mesures positives μ et ν. Ceci se traduit par le résultat suivant :

2.2.20 Corollaire : *Soit $(\tau_1,\cdots,\tau_m)$ un m-uplet d'éléments, à coefficients réels, dans $\mathcal{A}_\Delta$. Il existe des polynômes T_j à $2n$ variables tels que $\tau_j = T_j\circ\Psi$, pour tout j dans $\{1,\cdots,m\}$. Soit également λ forme linéaire semi-définie positive telle que les formes suivantes $[\lambda_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}(*) = \lambda(\Delta^{\varepsilon_1 e_1+\cdots+\varepsilon_n e_n}*)]_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n}$ et $[\lambda(\tau_j *)]_{j\in\{1,\cdots,m\}}$ soient aussi semi-définies positives. Alors, on peut trouver deux mesures positives ρ et ν, dont leurs supports soient inclus dans $\cap_j(T_j\circ\Psi)^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $\cap_j T_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$ respectivement, telles que l'on ait :*

$$\lambda(P\circ\Psi) = \int_I (P\circ\Psi)\,d\rho + \int_{G'} P\,d\nu, \tag{2.2.49}$$

où, I est l'ensemble $\bigcap\limits_j (T_j\circ\Psi)^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $G' = G\cap\bigcap\limits_j T_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

C'est exactement la même démonstration que pour le corollaire 2.2.8.

2.2.21 Notation : On notera par D le multi-indice $(d,\cdots,d)$ et soit $(P_1,\cdots,P_k)$ k-uplets de polynômes. Alors, pour chaque entier positif d, on définit :

$$\mathcal{Q}_d = \{g(t) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} t^\alpha \Delta(t)^\beta \text{ avec } \alpha\le\beta\le 2D\}.$$

On pose maintenant $\mathcal{C}'$ comme étant le cône positif engendré par les éléments de l'ensemble $\{r^2,\ \Psi_{1,j_1}\cdots\Psi_{1,j_l}r^2,\ P_m\Delta^{\delta(P_m)}s^2$ et $\Psi_{1,j_1}\cdots\Psi_{1,j_l}P_m\Delta^{\delta(P_m)}s^2$ où $r,s\in\mathcal{A}_\Delta$, $(j_1,\cdots,j_l)\in\{1,\cdots,n\}^l$, $1\le m\le k\}$. De la même manière, on note par Σ' le cône positif inclus dans $\mathcal{C}'$ et engendré par les éléments $\{r^2,\Psi_{1,j_1}\cdots\Psi_{1,j_l}r^2, r\in\mathcal{A}_\Delta,(j_1,\cdots,j_l)\in\{1,\cdots,n\}^l\}$.

2.2.22 Théorème : *Soit $(P_1,\cdots,P_k)$ un k-uplet de polynômes de degrés arbitraires et soit P un polynôme strictement positif sur $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+)\setminus\{0\}$. Soient $\hat{P}_1,\cdots,\hat{P}_k,\hat{P}$ leurs polynômes homogènes (en chaque variable) associés respectivement. On suppose*

que l'on a $\hat{P}(x) > 0$ *pour tout* x *non nul dans* $G \cap \cap_{i=1}^{k} \hat{P_i}^{-1}(\mathbb{R}_+)$ *où* G *a été défini dans le théorème* 2.2.19.
Alors, il existe un multi-indice positif $M = (m_1, \cdots, m_n)$ *et un nombre fini de polynômes à coefficients réels* $\{q_l, q_{j,l}, r_{i,l}, r_{i,j,l}\}$, $l \in L$, $i \in \{1, \cdots, k\}$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ *tels que l'on ait* $\sqrt{1+t_1^2}^{m_1} \cdots \sqrt{1+t_n^2}^{m_n} P(t)$ *qui s'écrit :*

$$\begin{aligned} &\sum_{l\in L} q_l^2(t,\Delta(t)) + \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^{n} (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l\in L} q_{j,l}^2(t,\Delta(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^{k} P_i(t) \sum_{l\in L} r_{i,l}^2(t,\Delta(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^{k} P_i(t) \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^{n} (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l\in L} r_{i,j,l}^2(t,\Delta(t)) \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration.
On veut appliquer un résultat sur l'existence de formes linéaires semi-définies positives dû à [Pu-Vas2]. On commence par vérifier les conditions du lemme 2.2.9. On pose ${\mathcal{C}'}_d = \mathcal{C}' \cap \mathcal{Q}_d$ et ${\mathcal{S}'}_d = {\mathcal{C}'}_d - {\mathcal{C}'}_d$, qui sont des espaces vectoriels pour tout entier positif d. On a ${\mathcal{C}'}_d \subset {\mathcal{S}'}_d \subset \mathcal{Q}_d$, donc ${\mathcal{S}'}_d$ est un espace de dimension finie. On obtient également $\mathcal{A}_\Delta = \mathcal{C}' - \mathcal{C}'$, puisque chaque élément f de $\mathcal{S}'$ peut s'écrire de la manière $\frac{1}{4}([f+1]^2 - [f-1]^2)$. De plus, on a :

$$({\mathcal{C}'}_{d+1} \cap {\mathcal{S}'}_d) \subset ({\mathcal{C}'}_{d+1} \cap \mathcal{Q}_d) = (\mathcal{C}' \cap \mathcal{Q}_{d+1} \cap \mathcal{Q}_d) = (\mathcal{C}' \cap \mathcal{Q}_d) = {\mathcal{C}'}_d.$$

Comme on a les trois inclusions suivantes : $({\mathcal{C}'}_{d+1} \cap {\mathcal{S}'}_d) \subset {\mathcal{C}'}_d$, ${\mathcal{C}'}_d \subset {\mathcal{C}'}_{d+1}$, ${\mathcal{C}'}_d \subset {\mathcal{S}'}_d$, on en conclut que l'égalité $({\mathcal{C}'}_{d+1} \cap {\mathcal{S}'}_d) = {\mathcal{C}'}_d$ est satisfaite. On veut, maintenant, prouver qu'il existe un élément $\xi \in {\mathcal{C}'}_1$, tel que pour tout entier strictement positif d et pour toute forme linéaire φ non identiquement nulle sur ${\mathcal{S}'}_d$ et positive sur ${\mathcal{C}'}_d$, on ait $\varphi(\xi) > 0$.

Pour prouver ceci, on prend $\xi = 1$ et on suppose que $\varphi(\xi) = 0$. Le but est de montrer que, sous ces conditions, la forme φ est identiquement nulle sur ${\mathcal{C}'}_d$.
En développant, on a $\Delta^{-2D}(t) = (1+t_1^2)^d \cdots (1+t_n^2)^d = \sum_{\alpha\leq D} t^{2\alpha}$ qui est une somme de carrés où apparaissent les $t^{2\alpha} = t_1^{2\alpha_1} \cdots t_n^{2\alpha_n}$ pour lesquels les α_i sont plus petits que d pour tout entier i compris entre 1 et n.

En particulier on a $1 - t^{2\alpha}\Delta^{2D}(t) \in {\mathcal{C}'}_d, \forall\alpha \leq D$. Comme $\varphi(1) = 0$, on en déduit $\varphi[t^{2\alpha}\Delta^{2D}(t)] = 0, \forall\alpha \leq D$. Si l'on suppose $\alpha \leq D$, $\beta \leq D$ et $x \in \mathbb{R}$, il en découle que $t^\alpha\Delta^D(t)$ et $t^\beta\Delta^D(t)$ sont dans $\mathcal{Q}_d$. Par conséquent, on a $\varphi[(t^\alpha\Delta^D(t) + x\, t^\beta\Delta^D(t))^2] = 0$. Et comme $\varphi[t^{2\beta}\Delta^{2D}(t)] = \varphi[t^{2\alpha}\Delta^{2D}(t)] = 0$, $x\varphi[t^{\alpha+\beta}\Delta^{2D}(t)]$ est positif quel que soit x, et donc :

$$\varphi[t^{\alpha+\beta}\Delta^{2D}(t)] = 0, \forall\alpha \leq D, \forall\beta \leq D. \tag{2.2.51}$$

Si $\alpha \leq 2D$, on écrit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ où $\alpha_1 \leq D$ et $\alpha_2 \leq D$. On applique alors (2.2.51) avec α_1 et α_2 pour obtenir $\varphi[t^{\alpha_1+\alpha_2}\Delta^{2D}(t)] = \varphi[t^\alpha \Delta^{2D}(t)] = 0, \forall \alpha \leq 2D$. En conclusion, en écrivant $t^\alpha \Delta^\beta(t) = [t^\alpha \Delta^{\beta-2D}(t)]\Delta^{2D}(t)$, lorsque $\alpha \leq \beta \leq 2D$, on peut appliquer l'argument précédent et on obtient finalement :

$$\varphi[t^\alpha \Delta^\beta(t)] = 0 \text{ quand } \alpha \leq \beta \leq 2D. \tag{2.2.52}$$

Donc la forme φ est nulle sur $\mathcal{Q}_d$, et donc on peut appliquer le lemme 4.1 de [PuVas2]. On peut aussi noter que l'on a $\mathcal{Q}_d = \mathcal{S'}_d$ pour tout entier positif d.

Comme $P\Delta^{\delta(P)} \in \mathcal{Q}_d$ pour un certain d, on a $P\Delta^{\delta(P)} \in \mathcal{S'}_d$. Supposons que $P\Delta^{\delta(P)} \notin Int(\mathcal{C'}_d)$, alors il existe une forme linéaire φ définie sur $\mathcal{A}_\Delta$ telle que sa restriction à $\mathcal{C}'$ soit positive et telle que $\varphi(P\Delta^{\delta(P)}) \leq 0$.
Grâce à la positivité de φ sur $\mathcal{C}'$, on peut utiliser le corollaire 2.2.20. Par conséquent, on peut trouver deux mesures positives ρ et ν, telles que l'on ait :

$$\varphi(P\Delta^{\delta(P)}) = \int_I \hat{P} \circ \Psi \, d\rho + \int_{G'} \hat{P} \, d\nu,$$

où $\hat{P} \circ \Psi$ n'est autre que $P\Delta^{\delta(P)}$, $I = \bigcap_j (P_j)^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $G' = G \cap \bigcap_j \tilde{P}_j^{-1}(\mathbb{R}_+)$ (voir le corollaire 2.2.20 pour la définition de ces ensembles). Ces deux mesures ne peuvent avoir des supports tous les deux vides. En effet le spectre joint $\sigma(\hat{C})$ est un ensemble qui est non vide. Enfin, en utilisant la condition de stricte positivité de notre polynôme P, on obtient la contradiction suivante :

$$0 \geq \varphi(P\Delta^{\delta(P)}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{P} \circ \Psi \, d\rho + \int_{G'} \hat{P} \, d\nu > 0.$$

On en conclut donc que $P\Delta^{\delta(P)}$ est nécessairement dans l'intérieur de $\mathcal{C'}_d$, et donc en particulier dans $\mathcal{C'}_d$ lui-même. Ceci est équivalent à dire qu'il existe un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{A}_\Delta$, notés $\{q_{l,\varepsilon}, q_{i,l,\varepsilon}\}$, $l \in L$, $i \in \{1, \cdots, k\}$, $j \in \{1, \cdots, n\}$, tels que l'on puisse écrire :

$$P(t)\Delta(t)^{\delta(P)} = \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \Big[\sum_{l\in L} q_{l,\varepsilon}^2(t) + \sum_{i=1}^k P_i(t)\Delta(t)^{\delta(P_i)} \sum_{l\in L} q_{i,l,\varepsilon}^2(t)\Big].$$

Enfin, en mettant le tout au même dénominateur, quite à multiplier par des polynômes, on obtient bien la formule (2.2.50). ■

2.2.23 Remarque : Dans le théorème 2.2.22, on a supposé $\hat{P}(t) > 0$ pour tout t non nul dans $G \cap \cap_{i=1}^k \hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et que P avait la même propriété pour tout élément dans $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. En pratique, il peut être difficile de déterminer G, et donc, on doit montrer la stricte positivité de $\hat{P}$ sur tout l'ensemble $\cap_{i=1}^k \hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. Mais cette condition devient alors suffisante pour impliquer la stricte positivité de P sur $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. En effet, si on a $t \in \cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$, grâce à (2.2.41), on obtient $\hat{P}_i(1,t) = P_i(t)$ et par conséquent $(1,t) \in \cap_{i=1}^k \hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Et ceci nous permet d'affirmer la positivité :

$$P(t) = \hat{P}(1,t) > 0.$$

2.2.24 Corollaire : *Soit* $(P_1, \cdots, P_k)$ *un k-uplet de polynômes de degrés arbitraires et soit* $P = g_0 + g_1$ *un polynôme strictement positif sur* $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$*. Soient* $\hat{P}_1, \cdots, \hat{P}_k, \hat{P}$ *leur polynômes homogènes associés, respectivement. Supposons que l'on ait* $\hat{g}_1(x) > 0$ *pour tout* x *dans* $G \cap \cap_{i=1}^k \hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ *et que* $\delta(g_0) < \delta(g_1)$*.*
Alors, il existe un multi-indice positif $M = (m_1, \cdots, m_n)$ *et un nombre fini de polynômes à coefficients réels* $\{q_l, q_{j,l}, r_{i,l}, r_{i,j,l}\}$*,* $l \in L$*,* $i \in \{1, \cdots, k\}$*,* $j \in \{1, \cdots, n\}$ *tels que* (2.2.50) *soit vérifié.*

Démonstration.
Premièrement, on remarque que l'inégalité $\delta(g_0) < \delta(g_1)$ implique $\hat{P}(x) = \hat{g}_1(x) > 0$ pour tout $x \in G \cap \cap_{i=1}^k \hat{P}_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. Par conséquent, on peut appliquer le théorème 2.2.22. Et donc il existe des fractions (q_l) et $(q_{j,l})$ dans $\mathcal{A}_\Delta$ telles que l'on ait :

$$P(t)\Delta(t)^{\delta(P)} = \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \Big[\sum_{l\in L} q_{l,\varepsilon}^2(t) + \sum_{i=1}^k P_i(t)\Delta(t)^{\delta(P_i)} \sum_{l\in L} q_{i,l,\varepsilon}^2(t) \Big].$$

∎

2.2.25 Remarque : Si on suppose que l'on ait pris $P_1 = \cdots = P_k = 0$, on obtient une représentation pour $P = g_0 + g_1$ telle que $\delta(g_0) < \delta(g_1)$; on suppose que le polynôme $\hat{g}_1$ associé à g_1 verifie l'inégalité $\hat{g}_1(x) > 0$ pour tout x dans G. Si P est strictement positif sur $\mathbb{R}^n$ (en particulier le multi-degré de P est pair), alors il existe des polynômes tels que l'on ait :

$$P(t) = \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l\in L} q_{j,l}^2(t, \Delta(t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^n$. Comme exemple, soit $P(t)$ de la forme $(\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\}} b_{\varepsilon M} t^{2\varepsilon M}) + Q(t)$, avec $b_{\varepsilon M} > 0$ pour tout ε non nul (on suppose, aussi, que $\delta(Q) < 2M$), on peut facilement voir que g_1 et g_0 satisfont à l'hypothèse du corollaire précédent où $g_1(t) = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\}} b_{\varepsilon M} t^{2\varepsilon M}$ et $g_0(t) = Q(t)$ (ce type de polynômes a été étudié dans le théorème 2.2.13 de cette section).

2.2.26 Exemple : Ici, on donne des exemples de polynômes pour lesquels le corollaire 2.2.24 s'applique. Pour ce faire, on reprend l'exemple utilisé dans la remarque précédente. On pose :

$$P_i(t) = t_i^{2a_i+1}, \quad i = 1, \cdots, n,$$
$$P(t) = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\}} b_{\varepsilon M} t^{\varepsilon M} + Q(t),$$

avec $b_{\varepsilon M} > 0$ pour tout ε non nul et où le multi-indice $M = (m_1, \cdots, m_n)$ représente le multi-degré (on suppose, aussi, que $\delta(Q) < M$). Alors, on a le polynôme homogène suivant :

$$\hat{P}(Z, X) = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n\setminus\{0\}} b_{\varepsilon M} X^{\varepsilon M} Z^{(1,\cdots,1)-\varepsilon M} + Z_1 \cdots Z_n Q_1(Z, X).$$

Soit ζ un élément de $G \cap \cap_{i=1}^n \hat{P_i}^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$, $\zeta \in (\mathbb{R}^2)^n$. Alors, il existe un entier j_0 dans $\{1, \cdots, n\}$ tel que :

$$(\zeta_{j_0,1}, \zeta_{j_0,2}) = (0, \pm 1).$$

Quitte à effectuer un changement d'indices, on peut toujours supposer que $j_0 = 1$. Soit M' le multi-indice $(m_2, \cdots, m_n)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\hat{P}(\zeta) &= \hat{P}((\zeta_{1,1}, \cdots, \zeta_{n,1}), (\zeta_{1,2}, \cdots, \zeta_{n,2})) \\
&= \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n \setminus \{0\}} b_{\varepsilon M} \zeta_{1,2}^{\varepsilon_1 m_1} \cdots \zeta_{n,2}^{\varepsilon_n m_n} \zeta_{1,1}^{1-\varepsilon_1 m_1} \cdots \cdots \zeta_{n,1}^{1-\varepsilon_n m_n} + \zeta_{1,1} \cdots \zeta_{n,1} Q(\zeta) \\
&= (\pm 1)^{m_1} \sum_{(\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^{n-1}} b_{\varepsilon M} \zeta_{2,2}^{\varepsilon_2 m_2} \zeta_{2,1}^{1-\varepsilon_2 m_2} \cdots \zeta_{n,2}^{\varepsilon_n m_n} \zeta_{n,1}^{1-\varepsilon_n m_n}.
\end{aligned}$$

Comme on a l'égalité $\hat{P}_i(Z, X) = P_i(X) = X_i^{2a_i+1}$, ζ vérifie les égalités suivantes :

$$\zeta_{j,2} \geq 0, \text{ pour tout } j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Par conséquent, on en déduit :

$$\hat{P}(\zeta) = \sum_{(\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^{n-1}} b_{\varepsilon M} \zeta_{2,2}^{\varepsilon_2 m_2} \zeta_{2,1}^{1-\varepsilon_2 m_2} \cdots \zeta_{n,2}^{\varepsilon_n m_n} \zeta_{n,1}^{1-\varepsilon_n m_n},$$

où tous les éléments $\zeta_{j,1}$ et $\zeta_{j,2}$ sont positifs ou nuls (il suffit de noter que chaque $\zeta_{j,1}$ est positif, on utilise la propriété (2.2.45) et on lui applique un caractère γ). Soit b le minimum de l'ensemble $\Big\{ b_{\varepsilon M}, \varepsilon \in \{0,1\}^n \Big\}$, qui est strictement positif. On peut alors majorer $\hat{P}(\zeta)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\hat{P}(\zeta) &\geq b \sum_{(\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^{n-1}} \zeta_{2,2}^{\varepsilon_2 m_2} \zeta_{2,1}^{1-\varepsilon_2 m_2} \cdots \zeta_{n,2}^{\varepsilon_n m_n} \zeta_{n,1}^{1-\varepsilon_n m_n} \\
&\geq b \sum_{(\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^{n-1}} \prod_{j=2}^n \zeta_{j,4}^{\varepsilon_j m_j} \; \zeta_{j,1}^{(1-\varepsilon_j) m_j}.
\end{aligned}$$

Comme dans la somme $\sum_{(\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^{n-1}} \prod_{j=2}^n \zeta_{j,2}^{\varepsilon_j m_j} \; \zeta_{j,1}^{(1-\varepsilon_j) m_j}$ tous les éléments de la forme $\prod_{j=2}^n \zeta_{j,*_j}^{m_j}$ apparaissent, où les $*_j$ prennent les valeurs 1 et 2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\hat{P}(\zeta) \geq b \prod_{j=2}^n (\zeta_{j,1}^{m_j} + \zeta_{j,2}^{m_j}).$$

Comme $\zeta_{j,1}$ et $\zeta_{j,2}$ sont positifs et ne peuvent s'annuler simultanément, ceci quel que soit j (voir les propriétés du spectre joint de la famille d'opérateurs auto-adjoints et la relation (2.2.44)), on obtient finalement $\hat{P}(\zeta) > 0$, ceci sur $G \cap \cap_{i=1}^n \hat{P_i}^{-1}(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ tout entier.

Par conséquent, chaque polynôme P de la forme précédente, qui est strictement positif sur $\cap_{i=1}^n P_i^{-1}(\mathbb{R}_+) - \{0\}$ (ce qui est vrai, en particulier, dès que l'on prend un polynôme Q strictement positif), satisfait aux hypothèses du corollaire 2.2.24. Et en conclusion, on obtient :

$$\sqrt{1+t_1^2}^{m_1} \cdots \sqrt{1+t_n^2}^{m_n} P(t) = \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l\in L} q_{j,l}^2(t,\Delta(t))$$

$$+ \sum_{i=1}^k t_i^{2a_i+1} \sum_{\varepsilon_j\in\{0,1\}} \prod_{j=1}^n (1+t_j^2)^{\varepsilon_j/2} \sum_{l\in L} r_{i,j,l}^2(t,\Delta(t)).$$

Partie II.3 Une application au problème tronqué

Dans cette troisième section de la partie II, on approfondira des résultats obtenus précédemment. En particulier, on caractérisera les formes semi-définies positives sur une sous-algèbre de $\mathcal{R}_\theta$ (on reprendra toutes les notations de II-1). Cette représentation des formes positives sous forme de *moments avec limites* sera utilisée pour donner une solution au problème tronqué des moments dans le cas de plusieurs variables. Enfin, on généralisera des résultats de M. RIESZ (voir [Ak]) où le cas unidimensionnel a été traité.

Soit un multi-indice $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multi-indice. On pose alors :

$$(2.3.1) \qquad e_{\alpha_i}(t) = \begin{cases} t_i^{\alpha_i} & \text{si } \alpha_i \geq 0, \\ \dfrac{t_i^{-\alpha_i - 2E(-\alpha_i/2)}}{(1+t_i^2)^{E(-\alpha_i/2)}} & \text{si } \alpha_i < 0. \end{cases}$$

Soit $e_\alpha(t) = \prod_{i=1}^n e_{\alpha_i}(t)$, la famille $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est bien évidemment (voir proposition 2.2.2) une base de l'algèbre $\mathcal{R}_\theta$. On notera par $\mathcal{A}_\theta$ l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_\alpha)_{\alpha \leq 0}$. En fait, $\mathcal{A}_\theta$ est l'algèbre des fractions bornées de $\mathcal{R}_\theta$.

2.3.1 Définition : Soit L une forme linéaire sur $\mathcal{A}_\theta$. Soit $\mathcal{P}$ un cône positif inclus dans $\mathcal{R}_\theta$. On dira que L est *$\mathcal{P}$-semi-définie positive* sur $\mathcal{A}_\theta$ si on a l'inégalité suivante :

$$(2.3.2) \qquad L_\gamma(f) \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{A}_\theta.$$

Dans le cas d'une variable, si f est une fonction qui admet une limite finie à l'infini, on pose :

$$\delta_\infty(f) = \lim_{|t| \to \infty} f(t).$$

La forme δ_∞ est positive semi-définie mais ne peut être représentée par une intégrale définie par une mesure positive. De la même façon, dans le cas de plusieurs variables, on pose, pour tout $f \in \mathcal{A}_\theta$:

$$(2.3.3) \qquad \delta_\infty^{(j)}(f) = \lim_{|t_j| \to \infty} f(t), \quad j = 1, \cdots, n.$$

2.3.2 Définition : Soit $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ une suite de nombres réels. On dira que γ est une *suite de moments avec limites* sur $\mathcal{A}_\theta$ s'il existe des mesures positives $(\rho_{i_1,\cdots,i_k})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, k=1,\cdots,n}$ et μ telles que l'on puisse écrire :

$$(2.3.4) \qquad \gamma_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} e_{-\alpha}(t) d\mu(t) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)} \cdots \delta_\infty^{(i_k)} e_{-\alpha}(t) d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t).$$

2.3.3 Théorème : *Soit Φ une forme linéaire positive semi-définie sur $\mathcal{A}_\theta$. Alors, il existe des mesures positives $(\rho_{i_1,\cdots,i_k})_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n, k=1,\cdots,n}$ et μ telles que l'on ait :*

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)d\mu(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)} \cdots \delta_\infty^{(i_k)} f(t) d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t), \qquad \forall f \in \mathcal{A}_\theta.$$

Démonstration.
La méthode reprend en grande partie celle utilisée pour démontrer le théorème 2.2.7. On ne répétera pas tous les détails ici. On rappelle que l'on pose $\mathcal{N}$ l'idéal $\{f \in \mathcal{A}_\theta$ tel que $\Phi(f\bar{f}) = 0\}$. Soit $\mathcal{A}_\theta/\mathcal{N}$ l'espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle *, *\rangle_\Phi$ défini par :

$$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_\Phi = \Phi(f\bar{g}) \text{ où } \hat{f} = f + \mathcal{N}.$$

Soit $\mathcal{H}_\Phi$ l'espace de Hilbert formé par la complétion de $\mathcal{A}_\theta/\mathcal{N}$. On pose pour tout $\hat{f}$ dans $\mathcal{A}_\theta/\mathcal{N}$

$$B_{i,j}(\hat{f}) = \Psi_{i,j}(t)\hat{f} + \mathcal{N}, \text{ où } \begin{cases} \Psi_{i,1}(t) = (1+t_i^2)^{-1} \\ \Psi_{i,2}(t) = t_i(1+t_i^2)^{-1} \\ \Psi_{i,3}(t) = t_i(1+t_i^2)^{-1} \\ \Psi_{i,4}(t) = t_i^2(1+t_i^2)^{-1} \end{cases}$$

Les $(B_{i,j})_{i,j}$ induisent des opérateurs $(\tilde{B}_{i,j})_{i,j}$ qui commutent sur $\mathcal{H}_\Phi$ vérifiant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \tilde{B}_{i,j}^2 = I_{\mathcal{H}} \\ \tilde{B}_{i,1} = \tilde{B}_{i,1}^2 + \tilde{B}_{i,1}^2 \\ \tilde{B}_{i,4} = \tilde{B}_{i,3}^2 + \tilde{B}_{i,4}^2 \end{cases}$$

La famille $\tilde{B} = (\tilde{B}_{i,j})_{i,j}$ forme une famille d'opérateurs auto-adjoints continus et commutants. Soit E sa mesure spectrale (jointe) et soit $\sigma_T(\tilde{B})$ son spectre joint. On sait que ce dernier vérifie :

$$\sigma_T(\tilde{B}) \subset \Big(\Psi(\mathbb{R}^n) \cup \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} H_{i_1,\cdots,i_k}\Big),$$

où $H_{i_1,\cdots,i_k}$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^{4n}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_{i_l,1} = x_{i_l,2} = x_{i_l,3} = 0, \\ x_{i_l,4} = 1, \end{cases} \quad \forall i_l \in \{i_1, \cdots, i_k\}$$

et qui vérifient $x_{i_l,1} > 0$, $x_{i_l,1} = x_{i_l,1}^2 + x_{i_l,2}^2$, $x_{i_l,4} = x_{i_l,3}^2 + x_{i_l,4}^2$, $\sum_{s=1}^4 x_{i_l,s} = 1$, pour tout i_l qui n'est pas dans $\{i_1, \cdots, i_k\}$. Bien entendu les $H_{i_1,\cdots,i_k}$ sont disjoints entre eux et avec $\Psi(\mathbb{R}^n)$. Soit $f \in \mathcal{A}_\theta$, il existe un polynôme P_f à $4n$ variables tel que $f = P_f \circ \Psi = P_f(\tilde{B})\mathbf{1}$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \langle f(t)\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\phi = \langle P_f(\tilde{B})(\mathbf{1}+\mathcal{N}), \mathbf{1}+\mathcal{N}\rangle_\phi = \int P_f(x) d\langle E(x)(\mathbf{1}+\mathcal{N}), \mathbf{1}+\mathcal{N}\rangle_\phi \\ &= \int_{\Psi(\mathbb{R}^n)\cup \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}} P_f(x) d\langle E(x)(\mathbf{1}+\mathcal{N}), \mathbf{1}+\mathcal{N}\rangle_\phi. \end{aligned}$$

Ceci entraine que l'on ait :

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)d\mu(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \int_{H_{i_1,\cdots,i_k}} P_f(x)d\langle E(x)(\mathbf{1}+\mathcal{N}), \mathbf{1}+\mathcal{N}\rangle_\phi.$$

Or sur chaque ensemble $H_{i_1,\cdots,i_k}$, on fait le changement de variable, $\forall j \in \{1,\cdots,n\} \cap \{i_1,\cdots,i_k\}^c$:

$$[x_{j,1}, x_{j,2}, x_{j,3}, x_{j,4}] \to [\Psi_{4j,1}(t), \Psi_{j,2}(t), \Psi_{j,3}(t), \Psi_{j,4}(t)]. \tag{2.3.5}$$

De plus, on peut noter que, pour tout $j \in \{i_1,\cdots,i_k\}$, on a :

$$[x_{j,1}, x_{j,2}, x_{j,3}, x_{j,4}] = [0,0,0,1] = [\delta_\infty^{(j)}(\Psi_{j,1}), \delta_\infty^{(j)}(\Psi_{j,2}), \delta_\infty^{(j)}(\Psi_{j,3}), \delta_\infty^{(j)}(\Psi_{j,4})]. \tag{2.3.6}$$

Donc il existe une mesure positive $\rho_{i_1,\cdots,i_k}$ à support dans $\mathbb{R}^{n-k}$ qui vérifie :

$$\int_{H_{i_1,\cdots,i_k}} P_f(x)d\langle E(x)(\mathbf{1}+\mathcal{N}), \mathbf{1}+\mathcal{N}\rangle_\phi = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)}\cdots\delta_\infty^{(i_k)}(f)(t)d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t).$$

Ceci implique qu'il existe des mesures positives $(\rho_{i_1,\cdots,i_k})_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n, k=1,\cdots,n}$ et μ telles que, pour tout $f \in \mathcal{A}_\theta$, on ait :

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)d\mu(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)}\cdots\delta_\infty^{(i_k)} f(t)d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t). \tag{2.3.7}$$

■

2.3.4 Corollaire : *Soit $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ une multi-suite de nombres réels. Alors γ est une suite de moments avec limites si et seulement si la forme linéaire L_γ associée à γ est semi-définie positive sur $\mathcal{A}_\theta$.*

Démonstration.

Si γ est une multi-suite de moments avec limites alors pour toute fonction f de la forme $f = \sum_{\alpha\geq 0} a_\alpha e_{-\alpha}$ dans $\mathcal{A}_\theta$, on a :

$$L_\gamma(f\bar{f}) = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} a_\alpha \bar{a}_\beta L_\gamma(e_{-\alpha}e_{-\beta}) = \sum_{\alpha,\beta\geq 0,\delta} a_\alpha \bar{a}_\beta c_{\alpha,\beta,\delta} L_\gamma(e_{-\delta})$$

$$= \sum_{\alpha,\beta\geq 0,\delta} a_\alpha \bar{a}_\beta c_{\alpha,\beta,\delta} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} e_{-\delta}\, d\mu + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)}\cdots\delta_\infty^{(i_k)} e_{-\delta}(t)d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t)\Big].$$

On obtient donc :

$$L_\gamma(f\bar{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 d\mu(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\delta_\infty^{(i_1)}\cdots\delta_\infty^{(i_k)}(f)(t)|^2 d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t) \geq 0.$$

Inversement, si L_γ est une forme semi-définie positive, par le théorème précédent 2.3.3, pour tout $f \in \mathcal{A}_\theta$, on obtient :

$$L_\gamma(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)d\mu(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)}\cdots\delta_\infty^{(i_k)}(f)(t)d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t). \tag{2.3.8}$$

En particulier, il en découle la représentation suivante :

$$\gamma_\alpha = L_\gamma(e_{-\alpha}) = \int_{\mathbb{R}^n} e_{-\alpha}(t)d\mu(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)}\cdots\delta_\infty^{(i_k)}(e_{-\alpha})(t)d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t).$$

Ceci achève la démonstration du corollaire. ■

2.3.5 Remarque : En particulier, pour les multi-indices $\alpha > 0$, on obtient une écriture « *classique* » sous forme de problème des moments. En effet, dans ce cas, on a la représentation intégrale suivante :

$$\gamma_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} e_{-\alpha}(t)d\mu(t), \quad \forall\alpha > 0. \tag{2.3.9}$$

Dans ce qui suit, on montrera qu'il existe un lien entre le problème tronqué des moments et la représentation des formes de moments avec limites.

2.3.6 Théorème : *Soit $\gamma = (\gamma_\alpha)_{0\leq\alpha\leq M}$ une multi-suite de nombres réels où le multi-indice M est strictement positif. Soit β un multi-indice vérifiant $2\beta > M$. Il existe une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ telle que l'on ait :*

$$\begin{cases} \gamma_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu(t), \ \forall\alpha \text{ vérifiant } 0\leq\alpha\leq M \\ \\ (1+t_1^2)^{\beta_1}\cdots(1+t_n^2)^{\beta_n} \mu\text{-intégrable} \end{cases}$$

si et seulement si il existe un réel positif b tel que la forme L_γ définie par :

$$\begin{cases} L_\gamma : \ f_\alpha(t) = t^\alpha(1+t_1^2)^{-\beta_1}\cdots(1+t_n^2)^{-\beta_n} & \to \gamma_\alpha \\ \qquad\quad 1 & \to b \end{cases}$$

soit $\mathcal{P}$ semi-définie positive où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions rationnelles de $\mathcal{A}_\theta$ qui sont positives sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.
Supposons que la mesure μ existe, soit L_γ la forme qui associe à chaque f_α le nombre reél γ_α. Montrons que L_γ est $\mathcal{P}$ semi-définie positive sur $Vect\{(f_\alpha)_{0\leq\alpha\leq M}\}$. Soit $g \in Vect\{(f_\alpha)_{0\leq\alpha\leq M}\}$, une fonction positive de la forme $g(t) = \sum_{0\leq\alpha\leq M} a_\alpha f_\alpha(t)$, dans ces conditions :

$$\begin{aligned} L_\gamma(g) &= \sum_{0\leq\alpha\leq M} a_\alpha\gamma_\alpha = \sum_{0\leq\alpha\leq M} a_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(t)(1+t_1^2)^{\beta_1}\cdots(1+t_n^2)^{\beta_n} d\mu(t) \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Soit $\tilde{L}$ la forme linéaire définie par $\tilde{L}|_{Vect\{(f_\alpha)_{0\leq\alpha\leq M}\}} = L_\gamma$ et par $\tilde{L}(1) = b$ où b est un nombre réel à déterminer afin que $\tilde{L}$ soit $\mathcal{P}$ semi-définie positive sur $Vect\{1, (f_\alpha)_{0\leq\alpha\leq M}\}$. Si $g \in Vect\{1, (f_\alpha)_{0\leq\alpha\leq M}\}$ est une fonction positive, alors $g(t)$ peut se mettre sous la forme $c + \sum_{0 \leq \alpha \leq M} a_\alpha f_\alpha(t)$ (pour le calcul suivant, la somme précédente sera notée $c + k(t)$).

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(g) &= bc + L_\gamma(k) = bc + \int_{\mathbb{R}^n} k(t)(1+t_1^2)^{\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{\beta_n} d\mu(t) \\
&= bc + \int_{\mathbb{R}^n} (g(t) - c)(1+t_1^2)^{\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{\beta_n} d\mu(t) \\
&\geq c[b - \int_{\mathbb{R}^n} (1+t_1^2)^{\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{\beta_n} d\mu(t)].
\end{aligned}$$

Comme le nombre c est positif (par passage à la limite quand t tend vers l'infini suivant la direction $t = (t_1, \cdots, t_1)$ dans l'expression de g) et comme $(1+t_1^2)^{\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{\beta_n}$ est μ-intégrable, il suffit de choisir b plus grand que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (1+t_1^2)^{\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{\beta_n} d\mu(t)$.

Inversement, si L_γ est $\mathcal{P}$ semi-définie positive sur $Vect\{1, (f_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq M}\}$. Alors par le théorème de prolongement de Riesz (voir [Ri] ou [Ak] p.69), on peut prolonger L_γ à $\mathcal{A}_\theta$ tout entier car les constantes sont dans $Vect\{1, (f_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq M}\}$. Soit Φ ce prolongement $\mathcal{P}$ semi-défini positif sur $\mathcal{A}_\theta$; alors, en particulier, Φ est positif semi-défini sur $\mathcal{A}_\theta$. Par le théorème 2.3.3, on obtient qu'il existe des mesures positives $(\rho_{i_1, \cdots, i_k})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, k=1,\cdots,n}$ et μ telles que pour toute fonction f dans $\mathcal{A}_\theta$, on ait :

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) d\mu(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)} \cdots \delta_\infty^{(i_k)} f(t) d\rho_{i_1, \cdots, i_k}(t). \tag{2.3.11}$$

En particulier, pour tout multi-indice positif α vérifiant $\alpha \leq M$, on a :

$$\gamma_\alpha = L_\gamma(f_\alpha) = \Phi(f_\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \frac{d\mu(t)}{(1+t_1^2)^{\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{\beta_n}}. \tag{2.3.12}$$

On pose alors $d\mu'(t) = (1+t_1^2)^{-\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{-\beta_n} d\mu(t)$. Il ne reste donc plus qu'à prouver que $(1+t_1^2)^{\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{\beta_n}$ est bien μ'-intégrable. Or on a l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+t_1^2)^{\beta_1} \cdots (1+t_n^2)^{\beta_n} d\mu'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 d\mu(t) \leq \Phi(1) = b < \infty. \tag{2.3.13}$$

■

Dans le cas d'une variable, étant donnés $n+1$ nombres réels $(s_k)_{0 \leq k \leq n}$ nous savons (c'est un théorème de M. Riesz, voir [Ri] ou [Ak] p.71) qu'il existe une mesure positive σ sur (a, b) telle que :

$$\begin{cases} s_k = \displaystyle\int_{(a,b)} u^k d\sigma(u), \quad k = 0, \cdots, n-1 \\ s_n \geq \displaystyle\int_{(a,b)} u^n d\sigma(u) \end{cases} \tag{2.3.14}$$

si et seulement si la suite tronquée $(s_k)_{0\leq k\leq n}$ est « non négative en respectant (a,b) ». Dans le cas où $(a,b)=\mathbb{R}$ et $n<+\infty$, on suppose que n est pair. Si de plus (a,b) est bornée, on peut remplacer l'inégalité par une égalité (en fait M. Riesz a démontré ce théorème dans le seul cas $(a,b)=\mathbb{R}$ et $n=+\infty$, voir [Ak]). On peut donner un analogue de ce théorème dans le cas de n variables dont la preuve sera basée sur le théorème d'existence de moments avec limites.

2.3.7 Proposition : *Soit $\gamma=(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{M}}$ une suite de nombres réels où $\mathcal{M}=\{\alpha<2M, M>0\}\cup\{(2\varepsilon_1 m_1,\cdots,2\varepsilon_n m_n),\varepsilon_i=0,1\}$. Il existe une mesure positive μ sur $\mathbb{R}^n$ telle que*

$$\begin{cases} \gamma_\alpha & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu(t), & \alpha<M \\ \gamma_{(2\varepsilon_1 m_1,\cdots,2\varepsilon_n m_n)} & \geq & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} t^{(2\varepsilon_1 m_1,\cdots,2\varepsilon_n m_n)} d\mu(t), & \varepsilon_i\in\{0,1\}, \end{cases}$$

si et seulement si L_γ est $\mathcal{P}$-semi-définie positive sur l'espace vectoriel $Vect\{(h_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{M}}\}$ où les fonctions h_α sont les fractions rationnelles données par $h_\alpha(t)=t^\alpha(1+t_1^2)^{-m_1}\cdots(1+t_n^2)^{-m_n}$.

Démonstration.
Supposons que la mesure μ existe, soit L_γ la forme linéaire qui associe à chaque h_α le nombre γ_α. Montrons que L_γ est $\mathcal{P}$ semi-définie positive sur $Vect\{(h_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{M}}\}$. Soit $g\in Vect\{(h_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{M}}\}$, on écrit $g(t)=\sum_{\alpha\in\mathcal{M}} a_\alpha h_\alpha(t)$ et on obtient :

$$(2.3.15)\quad \begin{aligned} L_\gamma(g) &= \textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{M}} a_\alpha\gamma_\alpha \geq \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} a_\alpha \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu(t) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} g(t)(1+t_1^2)^{m_1}\cdots(1+t_n^2)^{m_n} d\mu(t)\geq 0. \end{aligned}$$

Inversement, du fait de la définition de l'ensemble $\mathcal{M}$, on vérifie que la fonction constante 1 est dans l'espace vectoriel $Vect\{(h_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{M}}\}$. On peut donc prolonger la forme L_γ en une forme ϕ pour appliquer le théorème 2.3.3 (c'est la même remarque que pour le théorème précédent). Donc, pour tout multi-indice $\alpha\in\mathcal{M}$, on obtient :

$$(2.3.16)\quad \phi(h_\alpha)=\int_{\mathbb{R}^n} h_\alpha(t)d\mu(t)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\int_{\mathbb{R}^{n-k}}\delta_\infty^{(i_1)}\cdots\delta_\infty^{(i_k)}(h_\alpha)(t)d\rho_{i_1,\cdots,i_k}(t).$$

En particulier, si $\alpha<2M$, on en déduit les égalités suivantes :

$$(2.3.17)\quad \gamma_\alpha=\phi(h_\alpha)=\int_{\mathbb{R}^n} h_\alpha(t)d\mu(t)=\int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha d\mu'(t),$$

où la mesure positive μ' est donnée par $d\mu'(t)=(1+t_1^2)^{-m_1}\cdots(1+t_n^2)^{-m_n}d\mu(t)$. Pour les autres multi-indices α, on a :

$$(2.3.18)\quad \begin{aligned} \gamma_{2M\varepsilon}=\phi(h_{2M\varepsilon}) = & \int_{\mathbb{R}^n} t^{2M\varepsilon}(1+t_1^2)^{-m_1}\cdots(1+t_n^2)^{-m_n}d\mu(t) \\ & + \sum_{\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_k}}\int_{\mathbb{R}^{n-k}}\delta_\infty^{(i_1)}\cdots\delta_\infty^{(i_k)}(h_{2M\varepsilon})(t)d\rho_{\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_k}}(t). \end{aligned}$$

Et dans ce cas-ci, puisque nous avons l'inégalité :

$$\sum_{\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_k}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \delta_\infty^{(i_1)} \cdots \delta_\infty^{(i_k)} h_{2M\varepsilon}(t) d\rho_{\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_k}}(t) \geq 0, \tag{2.3.19}$$

on en conclut que :

$$\gamma_{(2\varepsilon_1 m_1,\cdots,2\varepsilon_n m_n)} \geq \int_{\mathbb{R}^n} t^{(2\varepsilon_1 m_1,\cdots,2\varepsilon_n m_n)} d\mu'(t), \quad \varepsilon_i \in \{0,1\}. \tag{2.3.20}$$

■

2.3.8 Remarque : Puisque dans le cas $n = 1$, le fait d'être $\mathcal{P}$-semi-définie positive pour une forme linéaire est équivalent au fait d'être seulement semi-définie positive. On retombe bien sur le théorème de M. Riesz cité précédemment.

Chapitre III

Sous-normalité jointe pour des multi-opérateurs

Dans ce troisième et dernier chapitre, nous traiterons un problème qui peut être lié au problème des moments : la sous-normalité. Etant donné un opérateur, le but est de donner un critère afin de savoir si cet opérateur admet ou non une extension normale : c'est-à-dire, étant donné un opérateur T défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, existe-t-il un autre opérateur N normal (vérifiant $NN^* = N^*N$) défini sur un espace $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$ tel que $Tx = Nx$ pour tout x dans $\mathcal{H}$ (ou dans le domaine de T s'il n'est pas borné) ? Le même problème se pose pour plusieurs opérateurs.

Ce chapitre sera décomposé en quatre parties, la première traitera du cas de multi-opérateurs bornés et les trois suivantes du cas non borné. Dans cette dernière situation, on commencera par donner une définition d'une notion un peu plus large que la sous-normalité : la *sous-normalité formelle*. Puis on donnera des critères de sous-normalité dans la troisième partie ainsi que plusieurs applications et exemples. On cherchera également à étendre des notions de minimalité sur les extensions normales. Enfin dans la dernière partie, on caractérisera les shifts à poids sous-normaux et on prouvera que des opérations sur ces shifts et leurs adjoints permettent de conserver la notion de sous-normalité.

Les sections III-2, III-3 et III-4 ont donné lieu à deux articles acceptés en 2002 : [De4] et [De5].

Partie III.1 Sous-normalité (jointe) pour les multi-opérateurs bornés

La première caractérisation pour un opérateur borné sous-normal est dû à P.R. Halmos en 1950 (voir [Hal]) et demande une certaine positivité ainsi que l'existence d'une constante majorant un produit scalaire. En 1955, J. Bram donne une caractérisation plus simple (il prouve, en fait, que la sous-normalité est équivalente à la positivité demandée par Halmos, voir le théorème 1 de [Br]). Enfin, M.R. Embry donne une nouvelle caractérisation qui généralise celle de Bram en 1973 (voir le théorème 1 de [Emb]).

Il apparaît également une notion de sous-normalité (jointe) pour des multi-opérateurs : on dira qu'une famille d'opérateurs $T_1, \cdots, T_m$ définie sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, est sous-normale si et seulement si il existe une famille commutative d'opérateurs normaux $N_1, \cdots, N_m$ définie sur un espace de HILBERT $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$ telle que $T_j x = N_j x$ ($j = 1, \cdots, m$) pour tout x dans $\mathcal{H}$. Une caractérisation de la sous-normalité dans le cas de multi-opérateurs est donnée par T. ITÔ (voir le théorème 1 de [It]), en 1958, en généralisant les résultats de BRAM. Enfin, A. LUBIN donne une caractérisation du type de celle de EMBRY dans le cas de plusieurs opérateurs en 1977 (voir le corollaire 4.6 de [Lub3]).

Dans cette partie, on pose $\mathcal{H}$ un espace de HILBERT, et soit $T = (T_1, \cdots, T_n)$ un multi-opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{H})^n$. Alors, pour tout polynôme de la forme $P(\bar{z}, z) = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha,\beta} \bar{z}^\alpha z^\beta$, on définit $P(T^*, T)$ par la formule suivante :

$$P(T^*, T) = \sum_{\alpha,\beta \geq 0} p_{\alpha,\beta} T^{*\alpha} T^\beta. \tag{3.1.1}$$

Nous utiliserons également la fonction Υ donnée par :

$$\Upsilon : z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \to (|z_1|^2, \cdots, |z_n|^2) \in \mathbb{R}^n.$$

Le but de cette partie est d'utiliser un résultat de A. Lubin (voir [Lub3], théorème 3.2) avec le théorème 1.1.7, pour obtenir des conditions de sous-normalité pour des multi-opérateurs bornés. En particulier nous pouvons retrouver des résultats de [Vas2] (voir aussi [At-Ped]).

3.1.1 Théorème : *Soient K et $\mathcal{T}$ comme dans le théorème 1.1.7 et soit T une famille commutative d'opérateurs $(T_1, \cdots, T_n)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})^n$. Alors, T admet une extension normale $N \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ ($\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$) dont le spectre joint est inclus dans $\Upsilon^{-1}(K)$ si et seulement si $(p \circ \Upsilon)(T^*, T) \geq 0$ pour tout $p \in \mathcal{T}$ (voir (1.1.7)).*

Démonstration.
Soit N une extension normale de T avec les propriétés de l'énoncé. Si $p(t) = \sum_\alpha a_\alpha t^\alpha \in \mathcal{T}$, pour tout $x \in \mathcal{H}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle (p \circ \Upsilon)(T^*, T)x, x \rangle &= \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha ||T^\alpha x||^2 = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha ||N^\alpha x||^2 \\ &= \langle \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha N^{*\alpha} N^\alpha x, x \rangle = \int_K p(t) d\mu_x(t) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

où $\mu_x(A) = \langle (E \circ \Upsilon^{-1}(A)x, x \rangle$ pour tout ensemble borélien A de $\mathbb{R}^n$ et où E est la mesure spectrale jointe de N.

Inversement, si $\langle (p \circ \Upsilon)(T^*, T)x, x \rangle \geq 0$, on pose $L_{\gamma(x)}(p) = \langle (p \circ \Upsilon)(T^*, T)x, x \rangle$ qui est positif pour tout $p \in \mathcal{T}$. Si $x \neq 0$, on peut appliquer le théorème 1.1.7 pour obtenir une mesure positive μ_x sur le compact K telle que l'on ait la représentation intégrale :

$$\gamma_\alpha(x) = \langle T^{*\alpha} T^\alpha x, x \rangle = \int_K t^\alpha d\mu_x(t), \quad \forall \alpha \geq 0. \tag{3.1.3}$$

De plus la mesure μ_x a son support dans $\mathbb{R}^n_+$. En effet, on a :

$$L_{\gamma(x)}(t^\alpha) = \langle (t_j p \circ \Upsilon)(T^*, T)x, x \rangle = \langle (p \circ \Upsilon)(T^*, T) T_j x, T_j x \rangle \geq 0.$$

Donc en appliquant le corollaire 1.1.8, on obtient bien l'inclusion voulue. En faisant un changement de variable, on peut écrire :

$$\int_K t^\alpha d\mu_x(t) = \int_{K'} t^{2\alpha} d\mu'_x(t), \quad \forall \alpha \geq 0. \tag{3.1.4}$$

Par polarisation, il existe une mesure positive opératorielle E, à support dans K', telle que l'on ait la représentation suivante :

$$T^{*\alpha}T^\alpha = \int_{K'} t^{2\alpha} dE(t), \quad \forall \alpha \geq 0. \tag{3.1.5}$$

Et en appliquant le théorème 3.2 de [Lub3], on en déduit que T admet une extension normale. Le fait que T admette une extension normale de support inclus dans $\Upsilon^{-1}(K)$ provient de l'égalité (3.1.3). Il existe donc une mesure positive opératorielle F_T telle que l'on ait :

$$T^{*\alpha}T^\alpha = \int_K t^\alpha dF_T(t), \tag{3.1.6}$$

et on applique à nouveau le théorème 3.2 de [Lub3]. ■

Bien sûr, on peut donner un équivalent du corollaire 1.1.8, pour la condition de sous-normalité en demandant que le support de la mesure opératorielle vérifie des conditions du type (1.1.19) ou (1.1.24).

3.1.2 Corollaire : *Soient K et $\mathcal{T}$ comme dans le théorème 1.1.7 et soit T une famille commutative et sous-normale d'opérateurs $(T_1, \cdots, T_n)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})^n$. S'il existe des polynômes $(R_j)_{j\in J}$ tels que $(R_jQ \circ \Upsilon)(T^*, T) \geq 0$ pour tout $Q \in \mathcal{T}$ et pour tout $j \in J$, alors :*

$$supp(F_T) \subset \{t \in K : R_j(t) \geq 0, \forall j \in J\}.$$

3.1.3 Corollaire : *Soient K et $\mathcal{T}$ comme dans le théorème 1.1.7 et soit T une famille commutative et sous-normale d'opérateurs $(T_1, \cdots, T_n)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})^n$. S'il existe des polynômes $(R_j)_{j\in J}$ tels que $(R_jQ \circ \Upsilon)(T^*, T) = 0$ pour tout $Q \in \mathcal{T}$ et pour tout $j \in J$, alors :*

$$supp(F_T) \subset \{t \in K : R_j(t) = 0, \forall j \in J\}.$$

Enfin, pour compléter cette partie sur la sous-normalité des multi-opérateurs bornés, on mentionne ici une caractérisation de la sous-normalité pour ce type de multi-opérateurs. Ce résultat nécessite quelques préliminaires et une nouvelle notion qui figurent dans la section suivante, c'est pour cela que nous ne donnons que son énoncé. Cette caractérisation généralise la proposition 3 de A. Athavale (1988) où ce dernier caractérise la sous-normalité d'un opérateur grâce à la notion d'hyponormalité jointe (voir la remarque 10 de [At] pour le cas multi-opératoriel). Pour plus de détails, on peut se référer à [At].

3.1.4 Théorème : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur borné commutatif sur un espace de* HILBERT *séparable $\mathcal{H}$. La famille $(S^\beta)_{\beta \leq \alpha}$ est mutuellement hyponormale pour tout multi-indice vérifiant $\alpha \geq (1, \cdots, 1)$ si et seulement si $S = (S_1, \cdots, S_m)$ est sous-normal.*

Ce résultat se retrouve sous le nom de corollaire 3.2.7 de la section suivante. La grande différence entre ce résultat et ceux qui précédent vient du fait qu'ici, on ne contrôle d'aucune façon le spectre joint d'une extension normale. Par contre, il a l'avantage d'être un critère de sous-normalité plus général puisqu'il est valable quel que soit le lieu du spectre des différentes extensions normales.

Partie III.2 Opérateurs formellement normaux

Dans cette partie, nous introduisons la notion de « *normalité (mutuelle) formelle* » pour une famille d'opérateurs non bornés définis dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Cette nouvelle notion est en fait une généralisation naturelle de la notion de « *normalité formelle* » introduite pour un opérateur non borné. On donne ensuite des relations entre cette nouvelle notion et la sous-normalité (jointe) ainsi que l'hyponormalité (on généralise en particulier des résultats de A. Athavale.). Entre autres, cette notion sera utilisée dans la section suivante pour donner un critère de sous-normalité jointe.

Avant toute chose, on rappellera quelques définitions en rapport avec la normalité dans le cas d'opérateurs non nécessairement bornés.

Soit T un opérateur non nécessairement borné défini dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. On dit que cet opérateur T est *sous-normal* (voir [St-Sz2]) s'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$ et un opérateur (non borné) normal N vérifiant les relations suivantes :

$$(3.2.1) \qquad \begin{cases} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(N) \subset \mathcal{K}, \\ Tx = Nx, \, \forall x \in \mathcal{D}(T), \end{cases}$$

où $\mathcal{D}(T)$ et $\mathcal{D}(N)$ représentent les domaines de T et N respectivement. Dans ce cas, N est appelé *extension normale* de T (on rappelle qu'un opérateur non borné N est dit *normal* s'il est fermé, à domaine dense et vérifie l'égalité $N^*N = NN^*$. On peut se référer au livre de W. Rudin, chapitre XIII pour plus de détails, [Ru]). J. Stochel et F.H. Szafraniec ont caractérisé les opérateurs non bornés sous-normaux ayant un domaine dense et invariant (voir le théorème 3 de [St-Sz2] et [St-Sz4] ; on peut également se référer à [St-Sz3] pour des propriétés spectrales de tels opérateurs). Dans toute la suite un uplet d'opérateur non nécessairement borné sera appelé *multi-opérateur*.

On rappelle qu'un multi-opérateur $T = (T_1, \cdots, T_m)$ défini dans $\mathcal{H}$ est dit *sous-normal* s'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$ et un multi-opérateur constitué d'opérateurs (non bornés) normaux et qui commutent (*i.e.* dont leurs mesures spectrales commutent) $N = (N_1, \cdots, N_m)$ tels que l'on ait : $\mathcal{D}(T_j) \subset \mathcal{D}(N_j)$ et $T_j x = N_j x$ pour tout $x \in \mathcal{D}(T_j)$, $j = 1, \cdots, m$. Comme dans le cas d'un seul opérateur, N est appelé *extension normale* de T.

On commence par donner la définition d'un multi-opérateur formellement normal, définition qui prolonge la notion d'opérateur formellement normal que l'on retrouve par exemple dans [St-Sz2].

3.2.1 Définition : Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de HILBERT séparable $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace $\mathcal{H}$, on dit que S est *formellement normal sur* $\mathcal{D}$ si la famille $(S_1, \cdots, S_m)$ vérifie les conditions suivantes :

$$(3.2.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(S_j) \text{ et } S_j\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad j = 1, \cdots, m, \\ \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(S_j^*), \quad j = 1, \cdots, m, \\ ||S_j f|| = ||S_j^* f||, \quad f \in \mathcal{D}, \\ S_i S_j = S_j S_i \text{ sur } \mathcal{D}, \quad i, j = 1, \cdots, m. \end{cases}$$

On peut noter que tout multi-opérateur normal est formellement normal sur un sous-espace invariant. De plus, toute famille commutative d'opérateurs symétriques vérifie les deux conditions précédentes sur un sous-espace invariant.

On commencera par donner une caractérisation des multi-opérateurs (ayant un domaine dense commun qui est invariant) possédant une extension formellement normale vérifiant quelques conditions supplémentaires de commutativité. On généralise, en particulier, des résultats de STOCHEL et SZAFRANIEC où le cas d'un seul opérateur a été étudié (voir [St-Sz2], proposition 2) avec des méthodes différentes. Dans leur résultat, ils utilisent la condition de positivité de HALMOS-BRAM (voir [Hal] et [Br]). Il paraît alors naturel d'utiliser ici la condition de ITÔ (voir [It]) qui généralise celle de HALMOS-BRAM dans le cas de plusieurs opérateurs.

Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans $\mathcal{H}$ tel qu'il existe un sous-espace $\mathcal{D}$ vérifiant $\mathcal{D} \subset \cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$, $S_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $S_i S_j = S_j S_i$ sur $\mathcal{D}$ $(i, j = 1, \cdots, m)$; on dira que S satisfait à la *condition de positivité de Itô sur* $\mathcal{D}$ si pour toute famille finie $(x_I)_{I \in \mathbb{Z}_+^m}$ d'éléments dans $\mathcal{D}$ on a :

$$(3.2.3) \qquad \sum_{I, J \in \mathbb{Z}_+^m} \langle S^I x_J, S^J x_I \rangle \geq 0.$$

On remarque que l'on peut définir sans ambiguïté chaque $S^I x_J$ puisque S est commutatif sur $\mathcal{D}$ et puisque cet espace $\mathcal{D}$ est invariant par chaque opérateur S_i $(i = 1, \cdots, m)$.

Avant de démontrer la proposition suivante, nous aurons besoin d'une « reformulation » du critère de ITÔ. La condition

$$\sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta' \geq 0} \langle S^{\alpha' + \beta} x_{\alpha, \alpha'}, S^{\alpha + \beta'} x_{\beta, \beta'} \rangle \geq 0,$$

pour toute famille $(x_{\alpha, \alpha'})_{\alpha, \alpha'}$ presque nulle dans $\mathcal{D}$ est équivalente à la condition de ITÔ sur ce même ensemble. En effet, si ce critère est vérifié, il suffit de poser comme famille $(x_{\alpha, \alpha'})_{\alpha, \alpha'}$ la famille $(x_{\alpha, 0})_{\alpha, 0}$ pour obtenir la positivité de ITÔ. Inversement si la condition de ITÔ est vérifiée, on l'applique à la famille presque nulle $(y_\alpha = \sum_{\alpha' \geq 0} S^{\alpha'} x_{\alpha, \alpha'})_{\alpha \geq 0}$.

3.2.2 Proposition : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* HILBERT *séparable $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace dense inclus dans $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$ tel que* *l'on ait $S_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $S_iS_j = S_jS_i$ sur $\mathcal{D}$ pour tout $i, j = 1, \cdots, m$. Alors S vérifie la condition de* Itô *sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ admet une extension formellement normale $N = (N_1, \cdots, N_m)$, définie sur un domaine commun $\mathcal{D}(N_j) = \mathcal{D}'$ dans un espace de* Hilbert *$\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $N_j^*(\mathcal{D}') \subset \mathcal{D}'$ pour tout $j = 1, \cdots, m$.

(ii) $S_j|_{\mathcal{D}} \subset N_j$ pour tout $j = 1, \cdots, m$.

(iii) $N_i^*N_j = N_jN_i^*$ et $N_i^*N_j^* = N_j^*N_i^*$ sur $\mathcal{D}'$, pour tout couple (i, j) dans $\{1, \cdots, m\}^2$.

Démonstration.
On définit pour cette démonstration $\mathcal{P}_z$ comme étant l'algèbre des polynômes en les $2m$ variables complexes $z_1, \overline{z_1}, \cdots, z_m, \overline{z_m}$.

On commence par supposer que $S = (S_1, \cdots, S_m)$ admet une extension mutuellement formellement normale $N = (N_1, \cdots, N_m)$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition. Grâce à l'hypothèse (i), on a :

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}' \subset (\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{D}^\infty(N_i) \cap \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{D}^\infty(N_i^*)). \tag{3.2.4}$$

Soit $(x_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{D}$. Alors, en utilisant la remarque précédente (3.2.4) et les hypothèses (ii) et (iii), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta \geq 0} \langle S^\beta x_\alpha, S^\alpha x_\beta \rangle &= \sum_{\alpha,\beta \geq 0} \langle N^\beta x_\alpha, N^\alpha x_\beta \rangle = \sum_{\alpha,\beta \geq 0} \langle N^{*\alpha} N^\beta x_\alpha, x_\beta \rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta \geq 0} \langle N^{*\alpha} x_\alpha, N^{*\beta} x_\beta \rangle = || \sum_{\alpha \geq 0} N^{*\alpha} x_\alpha ||^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Inversement, on suppose que S vérifie le critère de Itô sur $\mathcal{D}$. On définit une forme sesquilinéaire ϕ sur $\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}$ grâce à l'égalité suivante (et on étend par linéarité à tout $\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}$) :

$$\phi(z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x, z^\beta \overline{z}^{\beta'} \otimes y) = \langle S^{\beta+\alpha'} x, S^{\alpha+\beta'} y \rangle. \tag{3.2.5}$$

On peut vérifier que ϕ est anti-symétrique :

$$\phi(z^\beta \overline{z}^{\beta'} \otimes y, z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x) = \langle S^{\alpha+\beta'} y, S^{\beta+\alpha'} x \rangle = \overline{\phi(z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x, z^\beta \overline{z}^{\beta'} \otimes y)}.$$

Soit $X \in \mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}$ de la forme $\sum_{\alpha,\alpha' \geq 0} z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}$ où $(x_{\alpha,\alpha'})_{\alpha,\alpha' \geq 0}$ est une famille presque nulle d'éléments de $\mathcal{D}$. Alors, on obtient l'égalité :

$$\begin{aligned}\phi(X, X) &= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta' \geq 0} \phi(z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}, z^\beta \overline{z}^{\beta'} \otimes x_{\beta,\beta'}) \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta' \geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'} x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\beta'} x_{\beta,\beta'} \rangle \geq 0,\end{aligned}$$

qui est positif par la remarque sur la forme équivalente à l'inégalité de Itô. Donc, la forme linéaire ϕ est semi-définie positive. De plus, on a une opération canonique sur $\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}$ en posant :

$$p.X = \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} p(z,\overline{z}) z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}, \quad \forall p \in \mathcal{P}_z, \quad \forall X \in \mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D},$$

X de la forme $\sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}$. Donc le produit tensoriel $\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}$ peut être vu comme un $\mathcal{P}_z$-module. De plus, si $X = \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}$ et $Y = \sum_{\beta,\beta'\geq 0} z^{\beta}\overline{z}^{\beta'} \otimes y_{\beta,\beta'}$ sont dans $\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}$, on a pour $p(z,\overline{z}) = z^{\delta}\overline{z}^{\delta'}$:

$$\begin{aligned}\phi(p.X,Y) &= \phi\Big(\sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha+\delta}\overline{z}^{\alpha'+\delta'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}, Y\Big) = \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'+\delta'} x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\delta+\beta'} y_{\beta,\beta'}\rangle \\ &= \phi(X, z^{\delta'}\overline{z}^{\delta}.Y)\end{aligned}$$

Donc par linéarité, on obtient :

$$\phi(p.X,q.Y) = \phi(\overline{q}p.X,Y) = \phi(X,\overline{p}q.Y), \quad \forall (X,Y) \in (\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D})^2, \quad \forall (p,q) \in \mathcal{P}_z^2.$$

Cette propriété est quelquefois appelé la $\mathcal{P}_z$-symétricité de ϕ. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient alors :

$$|\phi(p.X,p.X)|^2 \leq \phi(|p|^2.X,|p|^2.X)\phi(X,X).$$

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments Y dans $\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}$ qui vérifient $\phi(Y,Y) = 0$. Par l'inégalité précédente, $\mathcal{N}$ est également un $\mathcal{P}_z$-module. On en déduit qu'il en est de même pour le quotient $\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}$. On peut alors appliquer la méthode due à Gelfand et Naimark (voir [Ge-Na], [Du-Schw], [Fu2], etc.). Alors, on définit l'espace $\mathcal{K}$ comme étant la complétion de $\mathcal{P} \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}$ en accord avec la forme sesquilinéaire ϕ. L'espace $\mathcal{K}$ avec le produit scalaire $\langle .,.\rangle_{\phi}$ est un espace de Hilbert, où on pose :

$$\langle X,Y\rangle_{\phi} = \phi(X,Y), \quad \forall X,Y \in \mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}. \tag{3.2.6}$$

Maintenant, on peut définir les opérateurs $(N_1,\cdots,N_m)$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{K}$, grâce à l'égalité :

$$N_j\Big(\sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'} + \mathcal{N}\Big) = \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'} \otimes S_j x_{\alpha,\alpha'} + \mathcal{N}. \tag{3.2.7}$$

Ces opérateurs $(N_j)_j$ sont bien définis car on a l'inclusion $N_j(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$ car $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{P}_z$-module. Et pour tout $j = 1,\cdots,m$, on a $\mathcal{D}(N_j) = \mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N} = \mathcal{D}'$ qui est un ensemble dense dans $\mathcal{K}$. De plus, pour tout j et pour tout k dans $\{1,\cdots,m\}$, on a :

$$\begin{aligned}N_jN_k\Big(\sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'} + \mathcal{N}\Big) &= \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'} \otimes S_jS_k x_{\alpha,\alpha'} + \mathcal{N} \\ &= N_kN_j\Big(\sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'} + \mathcal{N}\Big).\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout élément $X \in \mathcal{D}'$, on obtient $N_jN_k(X) = N_kN_j(X)$, ce qui est la commutativité de N sur $\mathcal{D}'$. De plus, on a $N_j(1 \otimes x + \mathcal{N}) = 1 \otimes S_jx + \mathcal{N}$ qui peut être identifié à S_jx. En effet, on a :

$$||N_j(1 \otimes x + \mathcal{N})||_\phi^2 = ||1 \otimes S_jx + \mathcal{N}||_\phi^2 = \phi(1 \otimes S_jx, 1 \otimes S_jx) = ||S_jx||^2,$$

et on peut définir une isométrie sur $\mathcal{D}$ que l'on étend ensuite par continuité à tout $\mathcal{H}$. Par conséquent, $\mathcal{H}$ peut être vu comme un sous-espace fermé de $\mathcal{K}$. Donc, $N = (N_1, \cdots, N_m)$ est une extension du multi-opérateur $S|_\mathcal{D} = (S_1|_\mathcal{D}, \cdots, S_m|_\mathcal{D})$, on doit juste montrer maintenant que N est formellement normal. Pour ce faire, on prend $X, Y \in \mathcal{D}$, et on montre que les formes $\psi_k(X + \mathcal{N}) = \langle N_k(X + \mathcal{N}), Y + \mathcal{N}\rangle_\phi$ ($k = 1, \cdots, m$) sont continues sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}'$ (on identifiera dans la suite un élément de $\mathcal{D}'$ avec un de ses représentants dans $\mathcal{D}$) :
(3.2.8)

$$\begin{aligned} |\psi_k(X)| &= |\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta' \geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'} S_k x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\beta'} y_{\beta,\beta'}\rangle| \\ &= |\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta' \geq 0} \langle S^{\beta+e_k+\alpha'} x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\beta'} y_{\beta,\beta'}\rangle| = |\langle X, Z\rangle_\phi| \leq ||X||_\phi ||Z||_\phi, \end{aligned}$$

où $Z + \mathcal{N}$ est défini par $\sum_{\beta,\beta' \geq 0} z^{\beta+e_k}\overline{z}^{\beta'} \otimes y_{\beta,\beta'} + \mathcal{N}$ si on a représenté $Y + \mathcal{N}$ par l'expression $\sum_{\beta,\beta' \geq 0} z^\beta \overline{z}^{\beta'} \otimes y_{\beta,\beta'} + \mathcal{N}$. On déduit de la remarque précédente que Y est dans le domaine de N_k^*. En conclusion, on a $\mathcal{D}' \subset \cap_{i=1}^m \mathcal{D}(N_i^*)$. De plus, on peut calculer explicitement $N_k^*(Y)$ pour chaque Y dans $\mathcal{D}'$. Soit X dans $\mathcal{D}'$, on a alors :

$$\begin{aligned} \langle X, N_k^*(Y)\rangle_\phi &= \langle N_k(X), Y\rangle_\phi = \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta' \geq 0} \langle S_k S^{\beta+\alpha'} x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\beta'} y_{\beta,\beta'}\rangle \\ &= \langle X, \sum_{\beta,\beta' \geq 0} z^{\beta+e_k}\overline{z}^{\beta'} \otimes y_{\beta,\beta'}\rangle_\phi. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant la densité de $\mathcal{D}'$, on obtient :

$$N_k^*(\sum_{\beta,\beta' \geq 0} z^\beta \overline{z}^{\beta'} \otimes y_{\beta,\beta'}) = \sum_{\beta,\beta' \geq 0} z^{\beta+e_k}\overline{z}^{\beta'} \otimes y_{\beta,\beta'} = z_k.Y.$$

En plus, on a vérifié que l'espace $\mathcal{D}'$ était invariant par les opérateurs $N_1^*, \cdots, N_m^*$. Donc la condition (i) est satisfaite. Soit $X = \sum_{\alpha,\alpha' \geq 0} z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'} \in \mathcal{D}'$, on peut effectuer le calcul suivant pour vérifier la commutativité demandée dans l'énoncé :

$$N_i^* N_j(X) = \sum_{\alpha,\alpha' \geq 0} z^{\alpha+e_i}\overline{z}^{\alpha'} \otimes S_j x_{\alpha,\alpha'} = N_j N_i^*(X).$$

De la même manière, on vérifie que $N_i^* N_j^* = N_j^* N_i^*$ sur $\mathcal{D}'$, donc la condition (iii) est également satisfaite. Pour terminer, on doit juste montrer que chaque opérateur est formellement normal, c'est à dire que l'on a l'égalité $||N_j(X)||_\phi = ||N_j^*(X)||_\phi$ pour tout $X \in \mathcal{D}'$. Mais, si on prend $X = \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}$, on vient de prouver les égalités :

$$\begin{cases} N_j(X) = \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes S_j x_{\alpha,\alpha'} \\ N_j^*(X) = \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha+e_j} \overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}. \end{cases}$$

En conclusion, on obtient :

$$\begin{aligned} ||N_j(X)||_\phi^2 &= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'} S_j x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\beta'} S_j x_{\beta,\beta'} \rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'+e_j} x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+e_j+\beta'} x_{\beta,\beta'} \rangle = ||z_j.X||_\phi^2 = ||N_j^*(X)||_\phi^2. \end{aligned}$$

Et donc, ceci achève la démonstration de l'implication voulue. ■

3.2.3 Remarque : Dans la proposition de J. Stochel and F.H. Szafraniec (pour un seul opérateur), il y a possibilité de décrire complétement le domaine de l'extension formellement normale construite. Même si notre méthode de construction est complétement différente, on peut obtenir également le domaine de l'extension formellement normale de façon explicite.

En effet, dans la proposition précédente, on a défini les opérateurs N_j $(j = 1, \cdots, m)$ sur le domaine commun $\mathcal{D}' = \mathcal{P}_z \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}$. Pour décrire $\mathcal{D}'$, on doit caractériser les vecteurs $X = \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}$ avec $(x_{\alpha,\alpha'})_{\alpha,\alpha'\geq 0}$ famille presque nulle de $\mathcal{D}$. Il suffit de regarder pour $Z = z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x$. Soit $Y = \sum_{\beta,\beta'\geq 0} z^\beta \overline{z}^{\beta'} \otimes y_{\beta,\beta'}$ avec $(y_{\beta,\beta'})_{\beta,\beta'\geq 0}$ famille presque nulle de $\mathcal{D}$. Alors, on a :

$$\langle Z, Y \rangle_\phi = \sum_{\beta,\beta'\geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'} x, S^{\beta'+\alpha} y_{\beta,\beta'} \rangle = \langle z^\alpha \otimes S^{\alpha'} x, Y \rangle_\phi.$$

Par densité de $\mathcal{D}'$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{K}$, on obtient les égalités suivantes :

$$Z = z^\alpha \otimes S^{\alpha'} x = N^{*\alpha}(1 \otimes S^{\alpha'} x),$$

avec $S^{\alpha'} x$ qui est un élément de $\mathcal{D}$ par l'hypothèse de stabilité. En conclusion, on obtient la représentation :

$$\mathcal{D}' = \{ \sum_{\alpha\geq 0} N^{*\alpha}(1 \otimes x), x \in \mathcal{D} \},$$

car l'inclusion inverse est triviale. Bien sûr, toutes les sommes sont finies.

En accord avec la définition d'un multi-opérateur hyponormal donné dans le cas borné par A. Athavale dans (voir [At]) et afin de ne pas utiliser une notion de commutativité qui est délicate pour des opérateurs non bornés, on définit une notion hyponormalité jointe pour des multi-opérateurs non nécessairement bornés :

3.2.4 Définition : Soit $T = (T_1, \cdots, T_m)$ un multi-opérateur non nécessairement borné défini dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. On dira que T est *mutuellement* *hyponormal* (ou *jointement hyponormal*) sur $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D} \subset \cap_{i=1}^m (\mathcal{D}(T_i) \cap \mathcal{D}(T_i^*))$ et si on a l'inégalité suivante :

$$\sum_{i,j=1}^{m} \langle T_i x_j, T_j x_i \rangle \geq || \sum_{i=1}^{m} T_i^* x_i ||^2, \tag{3.2.9}$$

pour toute famille $(x_1, \cdots, x_m)$ dans $\mathcal{D}^m$.

3.2.5 Remarque : Si on est dans le cas borné, cette définition est équivalente à celle donnée par A. ATHAVALE (voir remarque 1 dans [At]). Bien sûr, l'hyponormalité jointe est invariante par permutation, et tout uplet composé à partir d'éléments d'un multi-opérateur mutuellement hyponormal sur $\mathcal{D}$ est également mutuellement hyponormal sur $\mathcal{D}$.

Dans le cas borné, A. ATHAVALE a prouvé qu'un opérateur S est sous-normal si et seulement si la famille $(I, S, \cdots, S^p)$ est mutuellement hyponormale pour chaque entier $p \geq 1$. Le théorème suivant montre, en fait, que la notion d'hyponormalité jointe peut être reliée avec la notion de sous-normalité formelle ainsi qu'aux conditions (i)-(iii) de la proposition 3.2.2 (qui sont équivalentes à la sous-normalité dans le cas particulier des opérateurs bornés).

3.2.6 Théorème : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* HILBERT $\mathcal{H}$*. Soit, aussi, $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel inclus dans $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$ qui est dense dans $\mathcal{H}$ et qui vérifie $S_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $S_i S_j = S_j S_i$ sur $\mathcal{D}$ $(i, j = 1, \cdots, m)$. Alors, la famille $(S^\beta)_{\beta \leq \alpha}$ est mutuellement hyponormale sur $\mathcal{D}$ pour tout multi-indice $\alpha \geq (1, \cdots, 1)$ si et seulement si $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ admet une extension formellement normale $N = (N_1, \cdots, N_m)$ définie sur un domaine commun $(\mathcal{D}' = \mathcal{D}(N_i))$ vérifiant les conditions (i)-(iii) de la proposition* 3.2.2.

Démonstration.
On suppose que les familles $(S^\beta)_{\beta \leq \alpha}$ sont mutuellement hyponormales sur $\mathcal{D}$ pour tout $\alpha \geq (1, \cdots, 1)$. On a juste à montrer que $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ vérifie la condition de positivité de ITÔ (en vertu de l'équivalence de la proposition 3.2.2). Soit $(x_I)_{I \geq 0}$ une famille presque nulle d'éléments dans $\mathcal{D}$. Soit aussi α un multi-indice positif tel que $x_I = 0$ quand I ne vérifie pas l'inégalité $I \leq \alpha$. Alors, on a :

$$\sum_{I,J \geq 0} \langle S^I x_J, S^J x_I \rangle = \sum_{I,J \leq \alpha} \langle S^I x_J, S^J x_I \rangle.$$

De plus, la famille $(S^\beta)_{\beta \leq \alpha}$ est mutuellement hyponormale sur $\mathcal{D}$, par consésquent l'expression précédente vérifie :

$$\sum_{I,J \geq 0} \langle S^I x_J, S^J x_I \rangle \geq || \sum_{I \geq 0} (S^I)^* x_I ||^2 \geq 0. \tag{3.2.10}$$

En particulier, S vérifie le critère de ITÔ sur $\mathcal{D}$.

Inversement, soit $N = (N_1, \cdots, N_m)$ une extension formellement normale définie sur un domaine commun $(\mathcal{D}' = \mathcal{D}(N_i)$ comme dans la démonstration de la proposition

3.2.2) vérifiant les conditions (i)-(iii) de la proposition 3.2.2. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{I,J\leq\alpha}\langle S^I x_J, S^J x_I\rangle &= \sum_{I,J\geq 0}\langle N^I x_J, N^J x_I\rangle \\ &= \sum_{I,J\geq 0}\langle N^{*J} x_J, N^{*I} x_I\rangle = ||\sum_{I\geq 0} N^{*I} x_I||^2.\end{aligned}$$

Soit y dans $\mathcal{D}$, on définit $\Psi_J(x) = \langle S^J x, y\rangle$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. Alors, on a les égalités suivantes :

$$|\Psi_J(x)| = |\langle S^J x, y\rangle| = |\langle N^J x, y\rangle| = |\langle x, N^{*J} y\rangle| \leq ||x||.||N^{*J} y||.$$

On en déduit l'appartenance $y \in \mathcal{D}((S^J)^*)$ pour tout multi-indice positif J et par conséquent $y \in \cap_{I\geq 0}\mathcal{D}((S^J)^*)$. De plus, pour tout $y \in \mathcal{D}$, on sait que $\langle x, (S^J)^* y\rangle$ est égal à $\langle x, N^{*J} y\rangle$. En conclusion, en utilisant la densité de $\mathcal{D}$, on obtient l'égalité $(S^J)^* y$ $= P_{\mathcal{H}} N^{*J} y$ où $P_{\mathcal{H}}$ est la projection orthogonale de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{H}$ (si on reprend les notations de la proposition 3.3.2). Ceci entraîne que l'on obtient :
(3.2.11)

$$\sum_{I,J\leq\alpha}\langle S^I x_J, S^J x_I\rangle = ||\sum_{0\leq I\leq\alpha} N^{*I} x_I||^2 \geq ||P_{\mathcal{H}}\sum_{0\leq I\leq\alpha} N^{*I} x_I||^2 = ||\sum_{0\leq I\leq\alpha}(S^I)^* x_I||^2.$$

L'inégalité (3.2.9) est bien satisfaite. Finalement, le multi-opérateur $(S^I)_{0\leq I\leq\alpha}$ est donc mutuellement hyponormal sur $\mathcal{D}$. Ceci achève la démonstration. ■

Ce théorème donne une généralisation de la proposition 3 de [At] (voir également la remarque 10 de [At]). La démonstration est une conséquence simple du théorème précédent 3.2.6.

3.2.7 Corollaire : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur borné commutatif sur un espace de* Hilbert *séparable $\mathcal{H}$. La famille $(S^\beta)_{\beta\leq\alpha}$ est mutuellement hyponormale pour tout multi-indice vérifiant $\alpha \geq (1, \cdots, 1)$ si et seulement si $S = (S_1, \cdots, S_m)$ est sous-normal.*

Démonstration.
Si S est un multi-opérateur sous-normal borné, il admet une extension normale qui est en particulier une extension formellement normale sur $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions (i)-(iii) de la proposition 3.2.2. Il suffit alors de prendre comme sous-ensemble $\mathcal{D}$ l'espace $\mathcal{H}$ tout entier et d'utiliser le théorème précédent.

Inversement, si toutes les familles $(S^\beta)_{\beta\leq\alpha}$ sont mutuellement hyponormales, le multi-opérateur $S = (S_1, \cdots, S_m)$ (en prenant $\mathcal{D} = \mathcal{H}$) admet une extension formellement normale $N = (N_1, \cdots, N_m)$ par le théorème précédent qui est de la forme (voir proposition 3.2.2) :

$$N_j(\sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes x_{\alpha,\alpha'}) = \sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^\alpha \overline{z}^{\alpha'} \otimes S_j x_{\alpha,\alpha'}, \quad x_{\alpha,\alpha'} \in \mathcal{H}.$$

En utilisant les notations du théorème 3.2.6, on a :

$$\begin{aligned}
||N_j(\sum_{\alpha,\alpha'\geq 0} z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'}\otimes x_{\alpha,\alpha'})||_{\phi}^2 &= \langle N_jX, N_jX\rangle_{\phi} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\geq 0} \langle z^{\alpha}\overline{z}^{\alpha'}\otimes S_jx_{\alpha,\alpha'}, z^{\beta}\overline{z}^{\beta'}\otimes S_jx_{\beta,\beta'}\rangle_{\phi} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'+e_j}x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\beta'+e_j}x_{\beta,\beta'}\rangle.
\end{aligned}$$

Par le lemme 2 de [It], on obtient :

$$\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'+e_j}x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\beta'+e_j}x_{\beta,\beta'}\rangle \leq ||S_j||^2 \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\geq 0} \langle S^{\beta+\alpha'}x_{\alpha,\alpha'}, S^{\alpha+\beta'}x_{\beta,\beta'}\rangle.$$

Ceci entraine l'inégalité suivante :

$$||N_jX||_{\phi}^2 \leq ||X||_{\phi}^2\ ||S_j||^2,$$

donc les $(N_j)_j$ sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{K}$ (en les prolongeant par continuité). Ceci nous permet de conclure que le multi-opérateur N est une extension normale de S. ■

Dans ce qui suit, on utilise des techniques classiques pour obtenir des relations entre différents uplets d'opérateurs. Si on prend un multi-opérateur normal et un sous-normal, sous quelles conditions la famille formée par la juxtaposition de ces deux multi-opérateurs est-elle encore sous-normale (ou tout au moins formellement normale) ? Le fait de juxtaposer des multi-opérateurs entre eux ne nous assure pas la sous-normalité de la famille qui les compose. En effet, il existe des opérateurs commutatifs bornés et sous-normaux tels que le bi-opérateur formé ne soit pas jointement sous-normal (voir [Lub2] pour plus de détails).

3.2.8 Théorème : *Soit $A = (A_1, \cdots, A_s)$ un multi-opérateur sous-normal borné défini sur un espace de* HILBERT $\mathcal{H}$. *Soit également $N = (N_1, \cdots, N_m)$ un multi-opérateur normal non nécessairement borné défini sur le même espace de* HILBERT $\mathcal{H}$. *Enfin, on suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel dense $\mathcal{D}$ inclus dans $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(N_i)$ tel que l'on ait $N_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $A_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Si on a l'inclusion $A_jN_i \subset N_iA_j$, le multi-opérateur $(A, N|_{\mathcal{D}})$ admet une extension formellement normale.*

Démonstration.
Soit $T = (T_1, \cdots, T_s)$ une extension normale du multi-opérateur A. Alors, on définit l'espace de HILBERT $\mathcal{K}$ comme la complétion de l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $T^{*\alpha}x$ où α est un multi-indice positif et où x décrit $\mathcal{H}$.

Etape 1 : Alors, on définit le multi-opérateur $S = (S_1, \cdots, S_m)$ grâce aux relations :

(3.2.12) $$S_j(T^{*\alpha}x) = T^{*\alpha}N_jx, \quad j = 1, \cdots, m, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Le domaine commun des $(S_j)_j$ (noté par $\mathcal{D}(S_j)$) sera l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la forme $T^{*\alpha}x$ où x décrit $\mathcal{D}$. Comme chaque opérateur a le même domaine, on le notera par $\mathcal{D}(S)$. On peut remarquer également que $\mathcal{D}(S)$ est un sous-espace dense dans $\mathcal{K}$ puisque l'on sait que T est borné et que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$. On commence par vérifier que le multi-opérateur est bien défini. Si on a l'égalité $\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha = \sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta}y_\beta$, où $(x_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ et $(y_\beta)_{\beta\geq 0}$ sont des familles presque nulles d'éléments dans $\mathcal{D}$, grâce à la normalité de T, on a :

$$\langle S_j(\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha), \sum_{\delta\geq 0} T^{*\delta}z_\delta\rangle = \langle \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}N_jx_\alpha, \sum_{\delta\geq 0} T^{*\delta}z_\delta\rangle = \sum_{\alpha,\delta\geq 0}\langle T^\delta N_jx_\alpha, T^\alpha z_\delta\rangle.$$

Alors, en utilisant l'hypothèse sur la stabilité de $\mathcal{D}$ et la commutativité, on obtient que l'expression précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{\alpha,\delta\geq 0}\langle A^\delta N_jx_\alpha, A^\alpha z_\delta\rangle = \sum_{\alpha,\delta\geq 0}\langle N_jA^\delta x_\alpha, A^\alpha z_\delta\rangle = \sum_{\alpha,\delta\geq 0}\langle A^\delta x_\alpha, N_j^*A^\alpha z_\delta\rangle.$$

En effet, on sait que l'on a $A^\alpha z_\delta \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(N_j) = \mathcal{D}(N_j^*)$, de plus $A^\alpha N_j^* z_\delta$ est bien défini puisque $z_\delta \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(N_j^*)$. Par conséquent, en utilisant un théorème de Fuglede, Putnam et Rosenblum (noté jusque la fin, théorème FPR, voir [Fu], [Put], [Ro] et [Ru] pour les différentes versions de ce résultat), on obtient $A_iN_j^* \subset N_j^*A_i$. Ceci entraîne l'égalité $N_j^*A^\alpha z_\delta = A^\alpha N_j^* z_\delta$. Par conséquent, on en déduit :

(3.2.13)
$$\langle S_j(\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha), \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\delta}z_\delta\rangle = \sum_{\alpha,\delta\geq 0}\langle A^\delta x_\alpha, A^\alpha N_j^* z_\delta\rangle = \langle \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha, \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\delta}N_j^*z_\delta\rangle.$$

En utilisant un calcul similaire appliqué à la seconde expression, il en découle l'égalité suivante :

$$\langle S_j(\sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta}y_\beta), \sum_{\delta\geq 0} T^{*\delta}z_\delta\rangle = \langle S_j(\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha), \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\delta}z_\delta\rangle.$$

Alors, en utilisant la densité de l'espace vectoriel $\mathcal{D}(S)$, la définition de l'opérateur S_j est bien démontrée :

(3.2.14)
$$S_j(\sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta}y_\beta) = S_j(\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha).$$

Etape 2 : On montre que le multi-opérateur précédemment défini est commutatif sur $\mathcal{D}(S)$. Pour ce faire, on commence par prouver l'inclusion $T_iS_j \subset S_jT_i$. En effet, $S_jT_i(T^{*\alpha}x)$ est égal à $S_j(T^{*\alpha}T_ix)$ (par la normalité de T), ce qui n'est autre que $T^{*\alpha}T_iN_jx = T^{*\alpha}N_jA_ix$ par la stabilité de $\mathcal{D}$ et la commutativité supposée. On a également :

$$T_iS_j(T^{*\alpha}x) = T_iT^{*\alpha}N_jx = T^{*\alpha}A_iN_jx,$$

(par les mêmes arguments que précédemment) puis on conclut en utilisant l'hypothèse de commutativité. Utilisant la commutativité de la famille N, on en déduit que $S_iS_j = S_jS_i$ et de plus T est un multi-opérateur commutatif (puisque normal). Tous ces résultats permettent d'affirmer que $(T_1, \cdots, T_s, S_1, \cdots, S_m)$ est commutatif sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(S)$.

Etape 3 : On va montrer que, pour tout $j = 1, \cdots, m$, on a $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(S_j^*)$. Soit $y \in \mathcal{K}$, pour avoir $y \in \mathcal{D}(S_j^*)$, il suffit de montrer que la forme linéaire $\phi_j(x) = \langle S_j x, y\rangle$ est continue sur $\mathcal{D}(S_j)$. Si $(x_\alpha)_{\alpha\geq 0}$ une famille presque nulle d'éléments dans $\mathcal{D}$ et si y est de la forme $\sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta} y_\beta \in \mathcal{D}(S)$, alors on a par l'égalité (3.2.13) :

$$\langle S_j(\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha), y\rangle = \langle \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha, \sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta} N_j^* y_\beta\rangle. \tag{3.2.14}$$

Par conséquent, on obtient de (3.2.14) :

$$|\langle S_j(\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha), y\rangle| = |\sum_{\alpha,\beta\geq 0} \langle T^{\beta} x_\alpha, T^{\alpha} N_j^* y_\beta\rangle| \leq ||\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha|| \quad ||\sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta} N_j^* y_\beta||. \tag{3.2.15}$$

Donc, on déduit de l'inégalité précédente que pour tout $j = 1, \cdots, m$, l'inclusion $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(S_j^*)$ est satisfaite.

Etape 4 : On peut calculer explicitement l'opérateur S_j^* sur l'espace $\mathcal{D}(S)$ qui nous intéresse. Avec les mêmes notations et en utilisant le calcul ci-dessus, on obtient :

$$\langle x, S_j^* y\rangle = \langle S_j(\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha), \sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta} y_\beta\rangle = \langle \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha, \sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta} N_j^* y_\beta\rangle. \tag{3.2.16}$$

Enfin, grâce à la densité du domaine de S_j dans $\mathcal{K}$, on obtient une écriture pour l'adjoint S_j^* :

$$S_j^*(\sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta} y_\beta) = \sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta} N_j^* y_\beta. \tag{3.2.17}$$

Etape 5 : Maintenant, il ne nous reste plus qu'à prouver que le multi-opérateur $S_1, \cdots, S_m$ est formellement normal sur $\mathcal{D}(S)$. Pour ce faire, on prend $x = \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha$ et on a :

$$||S_j x||^2 = \langle S_j(\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha), S_j(\sum_{\beta\geq 0} T^{*\beta} x_\beta)\rangle = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} \langle T^{*\alpha} N_j x_\alpha, T^{*\beta} N_j x_\beta\rangle.$$

Par la normalité de T et la stabilité de $\mathcal{D}$, l'expression précédente devient :

$$\sum_{\alpha,\beta\geq 0} \langle A^{\beta} N_j x_\alpha, A^{\alpha} N_j x_\beta\rangle.$$

Enfin, en utilisant la commutativité ainsi que le théorème FPR, on a :

$$\sum_{\alpha,\beta\geq 0} \langle N_j A^{\beta} x_\alpha, N_j A^{\alpha} x_\beta\rangle = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} \langle N_j^* A^{\beta} x_\alpha, N_j^* A^{\alpha} x_\beta\rangle.$$

Comme tous les éléments x_α et y_β sont dans $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(N_j) = \mathcal{D}(N_j^*)$, ils sont en particulier dans $\mathcal{D}(A^{\delta} N_j^*)$ pour tout multi-indice positif δ. Par conséquent, on a $N_j^* A^{\beta} x_\alpha = A^{\beta} N_j^* x_\alpha$ et $N_j^* A^{\alpha} x_\beta = A^{\alpha} N_j^* x_\beta$. D'où, en utilisant l'étape 4, le calcul ci-dessus devient :

$$||S_j x||^2 = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} \langle T^{*\alpha} N_j^* x_\alpha, T^{*\beta} N_j^* x_\beta\rangle = ||S_j^* x||^2. \tag{3.2.18}$$

En conclusion, on obtient que S est un multi-opérateur formellement normal sur $\mathcal{D}(S)$. On a construit S tel que (T, S) soit commutatif sur $\mathcal{D}(S)$ et comme de plus T est normal, il en découle que (T, S) est également formellement normal sur $\mathcal{D}(S)$ (car $\mathcal{D}(S)$ est invariant par les T_i, $i = 1, \cdots, s$) et prolonge $(A, N|_{\mathcal{D}})$. Ceci achève la démonstration du théorème. ■

3.2.9 Remarques :

(1) Pour le résultat précédent, on a construit en fait une extension formellement normale de $N|_{\mathcal{D}}$ qui « commute » avec l'extension normale minimale du multi-opérateur A.

(2) Si on se place dans le cas de multi-opérateurs bornés, on obtient un résultat qui généralise la proposition 2 de [Slo] où le cas d'un opérateur A sous-normal et d'un opérateur B normal est démontré.

On utilise le théorème 3.2.8 pour donner une condition de sous-normalité pour un multi-opérateur formé par la juxtaposition de deux multi-opérateurs normaux (ou sous-normaux). On utilisera, en particulier des résultats récents (parus en 2001) de J. Eschmeier et F.-H. Vasilescu sur les extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques (voir le théorème 3.2 de [Es-Vas]).

3.2.10 Corollaire : *Soit $A = (A_1, \cdots, A_s)$ un multi-opérateur sous-normal borné défini sur un espace de* Hilbert *$\mathcal{H}$. Soit $N = (N_1, \cdots, N_m)$ un multi-opérateur normal (non nécessairement borné), défini dans le même espace, tel que $I + \sum_{1 \leq j \leq m} N_j^* N_j$, défini sur $\mathcal{D}$, admette une image dense (où $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense inclus dans $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(N_i)$ tel que l'on ait $N_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, $A_j(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $N_i^*(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$). On suppose, enfin, que l'on a $A_j N_i \subset N_i A_j$ $(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, s)$. Alors le multi-opérateur $(A, N|_{\mathcal{D}})$ admet une extension normale.*

Démonstration.

On utilise les notations de la démonstration du théorème 3.2.8. Soit U l'opérateur défini sur le domaine $\mathcal{D}(U)$ par :

$$UX = \sum_{1 \leq j \leq m} S_j^* S_j X, \quad \forall X \in \mathcal{D}(U) = \mathcal{D}(S). \tag{3.2.19}$$

L'opérateur U est bien défini du fait de la double inclusion suivante (que nous avons déjà vérifiée plus haut) : $S_j(\mathcal{D}(S)) \subset \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(S_j^*)$. On commence par calculer explicitement $\langle (I+U)X, X\rangle$ (on notera X par l'expression $\sum_{\alpha \geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha$) :

$$\langle (I+U)X, X\rangle = ||\sum_{\alpha \geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha||^2 + \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{\alpha, \beta \geq 0} \langle T^{*\alpha} N_j^* N_j x_\alpha, T^{*\beta} x_\beta \rangle.$$

Par la normalité de T, on a :

$$||\sum_{\alpha \geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha||^2 + \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{\alpha, \beta \geq 0} \langle T^{\beta} N_j^* N_j x_\alpha, T^{\alpha} x_\beta \rangle.$$

Par la stabilité de l'espace $\mathcal{D}$, cette expression devient :

$$||\sum_{\alpha \geq 0} T^{*\alpha} x_\alpha||^2 + \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{\alpha, \beta \geq 0} \langle A^{\beta} N_j^* N_j x_\alpha, A^{\alpha} x_\beta \rangle.$$

Enfin, par l'hypothèse de commutativité ainsi que le théorème FPR, ceci peut s'écrire :

$$\langle (I+U)X, X\rangle = ||\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha||^2 + \sum_{1\leq j\leq m} ||\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}N_jx_\alpha||^2. \tag{3.2.20}$$

Grâce à la définition de S_j^* sur $\mathcal{D}(S)$ et puisque l'on a supposé $N_i^*(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}$, on obtient $(I+U)\mathcal{D}(U)\subset\mathcal{D}(U)$. De plus, par le calcul précédent, on voit que l'opérateur U est injectif. Soit Y de la forme $\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}y_\alpha \in \mathcal{D}(U)$ et soit X de la forme $\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha$, on a :

$$(I+U)X = \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}(I+\sum_{1\leq j\leq m} N_j^*N_j)x_\alpha. \tag{3.2.21}$$

Par conséquent, grâce à l'hypothèse de densité de l'image de $I+\sum_{1\leq j\leq m} N_j^*N_j$, on obtient la même propriété pour l'image de $I+U$, op—'erateur défini sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}(S)$ (on utilise également la continuité des opérateurs $(T_i^*)_i$). Comme les opérateurs S_j vérifient $\mathcal{D}(S_j)\subset\mathcal{D}(S_j^*)$, on décompose chaque opérateur comme C_j+iB_j avec $\mathcal{D}(B_j)=\mathcal{D}(C_j)$ (voir le lemme 2.2 de [Ot] pour de telles décompositions, voir aussi [Es-Vas]), où les opérateurs $(C_j)_j$ et $(B_j)_j$ sont symétriques. En fait, on a :

$$C_j = \frac{S_j+S_j^*}{2} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{S_j-S_j^*}{2i}.$$

De plus, comme $\mathcal{D}(S)$ est invariant par chaque S_j et chaque S_j^* puisque $N_i^*(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}$, on obtient :

$$\mathcal{D}(S)\subset\bigcap_{i=1}^m \mathcal{D}^\infty(S_j)\cap\bigcap_{i=1}^m \mathcal{D}^\infty(S_j^*).$$

On a également, grâce à la commutativité du multi-opérateur N et à sa normalité, $S_jS_kx=S_kS_jx$ et $S_jS_k^*x=S_k^*S_jx$ pour tout $x\in\mathcal{D}(S)$. On en conclut que :

$$B_j^*C_kx = B_jC_kx = C_kB_jx = C_k^*B_jx, \quad \forall x\in\mathcal{D}(S).$$

Ceci implique que pour tout $x\in\mathcal{D}(S)$, on a $S_j^*S_jx = C_j^2x+B_j^2x$. Donc, en utilisant le théorème 3.2 de [Es-Vas], on obtient que l'opérateur U qui s'écrit :

$$Ux = \sum_{j=1}^m S_j^*S_jx = \sum_{j=1}^m C_j^2x + B_j^2x, \quad \forall x\in\mathcal{D}(S),$$

est essentiellement auto-adjoint. Et par une généralisation d'un résultat de Nelson (voir [Nel] et [Pu-Vas2] également), on obtient que $(\overline{C_1},\cdots,\overline{C_m},\overline{B_1},\cdots,\overline{B_m})$ est une famille commutative d'opérateurs auto-adjoints. Si (x,y) est un bi-point dans le graphe de $\overline{C_j}$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{D}(C_j)$ telle que l'on ait $x_n\to x$ et $C_jx_n=\overline{C_j}x_n\to y=\overline{C_j}x$. On écrit $x_n=\sum_I T^{*I}z_{I,n}$, et on a :

$$T_kC_jx_n = \sum_{I\geq 0} T_kT^{*I}\frac{N_j+N_j^*}{2}z_{I,n} = \sum_{I\geq 0} T^{*I}\frac{N_j+N_j^*}{2}T_kz_{I,n} = C_jT_kx_n$$

(pour vérifier la relation $T_k(N_j+N_j^*)z_{I,n}=(N_j+N_j^*)T_kz_{I,n}$, on doit juste remarquer que $z_{I,n}$ est dans $\mathcal{D}\subset\mathcal{H}$ et utiliser le théorème FPR ainsi que l'invariance de $\mathcal{D}$ par

N_j^*). La suite $(T_kC_jx_n)_{n\geq 0}$ converge vers $T_k\overline{C_j}x$ parce que l'opérateur T_k est continu. Donc, $(T_kx_n, C_jT_kx_n)$ est dans le graphe de $\overline{C_j}$ qui est fermé et cette suite converge vers le bi-point $(T_kx, T_k\overline{C_j}x)$. En conséquence, $(T_kx, T_k\overline{C_j}x)$ est dans le graphe de $\overline{C_j}$. Ceci implique, en particulier, que T_kx est dans le domaine $\mathcal{D}(\overline{C_j})$ et qu'il vérifie $\overline{C_j}T_kx = T_k\overline{C_j}x$. Bien sûr la même opération peut être faite pour les fermetures canoniques des opérateurs B_k. Ensuite, il suffit de poser :

$$R_j = \overline{C_j} + i\overline{B_j}, \quad j = 1, \cdots, m.$$

Ceci entraîne que le multi-opérateur $R = (R_1, \cdots, R_m)$ est normal. De plus, R satisfait $T_kR_j \subset R_jT_k$. Donc, pour tout ensemble borélien σ_j (si E_j est la mesure spectrale associée à R_j), on a $T_kE_j(\sigma_j) = E_j(\sigma_j)T_k$ (voir le théorème 13.33 de [Ru]). Si F_k est la mesure spectrale associée à T_k, alors E_j et F_k commutent dans le sens :

$$F_k(\tau_k)E_j(\sigma_j) = E_j(\sigma_j)F_k(\tau_k), \tag{3.2.22}$$

où τ_k est un ensemble borélien de $\mathbb{C}$. Pour tout couple d'ensembles boréliens de la forme $\sigma = \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_m$ et $\tau = \tau_1 \times \cdots \times \tau_s$, on a $F(\tau)E(\sigma) = E(\sigma)F(\tau)$, puisque $F(\tau) = F_1(\tau_1)\cdots F_s(\tau_s)$ et $E(\sigma) = E_1(\sigma_1)\cdots E_m(\sigma_m)$. Enfin, on approxime chaque ensemble borélien par des éléments de cette forme. Finalement, on en conclut que la famille (T, R) est une famille commutative d'opérateurs normaux qui prolonge $(A, N|_{\mathcal{D}})$. ■

3.2.11 Remarques :

(1) Dans le cas d'opérateurs bornés, on sait que si A est sous-normal et commute avec un opérateur normal B, (et si N est l'extension normale minimale de A) il existe une unique extension normale de B qui commute avec N (voir la proposition 2 de [Slo]).

(2) Le fait de supposer plus de conditions sur le multi-opérateur N dans le corollaire précédent 3.2.10 semble nécessaire. En effet, on sait que si on a deux opérateurs commutatifs sous-normaux bornés S et T, et si S admet une extension sous-normale qui commute avec l'extension normale minimale de T, ceci n'est pas équivalent au fait que le multi-opérateur (S, T) soit sous-normal (voir le problème 2 de [Abr]).

(3) La normalité formelle dans le cas d'un seul opérateur peut être liée à la normalité. En effet, E.A. CODDINGTON donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur formellement normal soit normal (voir [Cod]). Mais ceci n'est pas toujours valable, en fait il existe des opérateurs formellement normaux qui n'admettent pas d'extensions normales (voir par exemple [Ot-Sch]).

Partie III.3 Sous-normalité jointe

Dans cette troisième section dédiée aux opérateurs non bornés, nous nous intéresserons au problème de la sous-normalité proprement dite. On donnera plusieurs critères de sous-normalité jointe. Dans toute cette partie, on s'occupera de multi-opérateurs ayant un sous-espace invariant et dense. Les premiers critères utilisent des solutions du problème des moments sur des ensembles non bornés dans le cas de plusieurs variables. On donne en particulier des caractérisations en terme d'existence de multi-suites de formes sesquilinéaires vérifiant certaines conditions de positivité (voir [Vas4] pour des résultats similaires). Nous donnons également un critère basé sur une méthode due à Stochel et Szafraniec où le cas d'un seul opérateur a été traité (voir [St-Sz2]). Cette dernière nécessite entre autres choses la notion de sous-normalité formelle traitée précédemment.

On donne également une première application de ces critères au cas de multi-opérateurs formés d'applications linéaires bijectives. Ces résultats généralisent des propositions publiées en 1989 par les derniers auteurs cités.

Avant de commencer proprement dit, on introduit plusieurs notations et remarques nécessaires. Soit λ une forme sesquilinéaire, on note par λ^- le conjugué de λ : c'est-à-dire la forme définie par :

$$\forall (x,y), \quad \lambda^-(x,y) = \overline{\lambda(x,y)};$$

$\overline{\lambda}$ n'est plus sesquilinéaire.

On travaillera avec des $3n$-suites de formes sesquilinéaires $\Theta = (\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n}$ définies sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$, vérifiant pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\delta) \in (\mathbb{Z}_+^n)^3$ et pour tout couple (x,y) dans $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$:

$$(3.3.1) \qquad \begin{aligned} &(i) \quad \Theta_{0,0,0}(*,*) = \langle *,* \rangle|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}, \\ &(ii) \quad \Theta_{\alpha,\beta,\delta} = \Theta^-_{\beta,\alpha,\delta} \circ W, \end{aligned}$$

où $\langle *,* \rangle$ est le produit scalaire sur $\mathcal{H}$ et où W est l'involution sur $\mathcal{H}^2$ donnée par $W(x,y) = (y,x)$. On peut associer à cette multi-suite Θ une forme hermitienne *unitale* Λ_Θ sur $\mathcal{F}\otimes\mathcal{D}$, où $\mathcal{F}$ est l'algèbre des fractions rationelles en $(\bar{z},z)$ avec des dénominateurs de la forme $(1+|z_1|^2)^{\omega_1}\cdots(1+|z_n|^2)^{\omega_n}$.

3.3.1 Définition : En reprenant ce qui vient d'être dit, soit Λ_Θ une forme hermitienne définie sur $\mathcal{F}\otimes\mathcal{D}$. On dira que Λ_Θ est *unitale* si, pour tout $x\in\mathcal{D}$, on a :

$$\Lambda_\Theta(1\otimes x, 1\otimes x) = ||x||^2.$$

Afin de ne pas alourdir les notations, on notera par $(1+|z|^2)^\omega$ l'expression $(1+|z_1|^2)^{\omega_1}\cdots(1+|z_n|^2)^{\omega_n}$ où ω est le multi-indice négatif $(\omega_1,\cdots,\omega_n)$. Si on considère dans l'algèbre $\mathcal{F}$ la famille génératrice $(\bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta})_{\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n}$, alors pour toute paire (ϕ,ψ) dans $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{D})^2$, $\phi=\sum_{\alpha,\beta,\delta}\bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta}\otimes x_{\alpha,\beta,\delta}$ et $\psi=\sum_{\alpha,\beta,\delta}\bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta}\otimes y_{\alpha,\beta,\delta}$, on définit Λ_Θ par :

$$\Lambda_\Theta(\phi,\psi)=\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'}\Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(x_{\alpha,\beta,\delta},y_{\alpha',\beta',\delta'}).$$

Enfin, la multi-suite Θ sera dite de *type positive* si la forme associée Λ_Θ est semi-définie positive.

Du fait que $\Theta_{0,0,0}$ est la restriction du produit scalaire sur $\mathcal{H}$, on peut affirmer que l'application linéaire $\mathcal{D}\ni x\to 1\otimes x\in\mathcal{F}\otimes\mathcal{D}$ est une isométrie, qui peut s'étendre par continuité à $\mathcal{H}$ tout entier. Ceci permet d'identifier $\mathcal{D}$ comme un sous-espace de $\mathcal{F}\otimes\mathcal{D}$. Pour plus de détails, on peut se référer à l'égalité (1.10′) et à l'exemple 1.5.1 de [Vas4].

Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On peut alors donner la caractérisation de sous-normalité jointe suivante (on peut noter qu'une autre version de ce résultat a été donnée par F.-H. Vasilescu, voir le théorème 3.4 de [Vas4]) :

3.3.2 Théorème : *Soit $T=(T_1,\cdots,T_n)$ un multi-opérateur non nécessairement borné défini dans un espace de* Hilbert *$\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}(T_1)\cap\cdots\cap\mathcal{D}(T_n)$ un sous-espace vectoriel, dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par $T_1,\cdots,T_n$. Il existe un espace de* Hilbert *$\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$ et un multi-opérateur normal $N=(N_1,\cdots,N_n)$ défini dans $\mathcal{K}$ tels que l'on ait $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}(N_1)\cap\cdots\cap\mathcal{D}(N_n)$ et $T_jx=N_jx$ pour tout élément x dans $\mathcal{D}$ et pour tout j dans $\{1,\cdots,n\}$ si et seulement si il existe une $3n$-suite $\Theta=(\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n}$ de formes sesquilinéaires définies sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ vérifiant les cinq propriétés suivantes :*

(1) $\Theta_{0,0,0}(*,*)=\langle *,*\rangle|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}$.
(2) $\Theta_{0,e_j,0}(x,y)=\langle T^{e_j}x,y\rangle$ *pour tout* $(x,y)\in\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ *et pour tout* $j\in\{1,\cdots,n\}$.
(3) $\Theta_{e_j,e_j,0}(x,x)=\Theta_{e_j,0,0}(T^{e_j}x,x)=||T^{e_j}x||^2$, $j\in\{1,\cdots,n\}$, $x\in\mathcal{D}$.
(4) $\Theta_{\alpha,\beta,\delta}=\Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_j}+\Theta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j}$ *pour tout* $\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n$ *et pour tout* $j\in\{1,\cdots,n\}$.
(5) Θ *est de type positive.*

Démonstration.
On suit les lignes de la démonstration du théorème 3.4 de [Vas4] (voir également [Pu-Vas2] et [Vas5] pour des méthodes similaires). Comme il existe des différences importantes dans la démonstration, on donnera tous les détails. On commence par supposer que le multi-opérateur $T|_{\mathcal{D}}=(T_1|_{\mathcal{D}},\cdots,T_n|_{\mathcal{D}})$ admette une extension normale N, définie dans un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$. De plus, par notre hypothèse d'invariance, on a l'inclusion :

$$\mathcal{D}\subset\mathcal{D}^\infty(N).$$

Soit E la mesure spectrale (jointe) associée au multi-opérateur normal N. On définit les formes sesquilinéaires $\Theta_{\alpha,\beta,\delta}$ sur $\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}$ par :

$$(3.3.2)\quad \Theta_{\alpha,\beta,\delta}(x,y)=\langle\int_{\sigma(N)}\bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta}dE(z)x,y\rangle,\ \forall\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n,\ \forall(x,y)\in\mathcal{D}^2.$$

En particulier, pour tout (x,y) dans $\mathcal{D}^2$, on a :

$$\Theta_{0,0,0}(x,y) = \langle \int_{\sigma(N)} 1 dE(z)x,y\rangle = \langle x,y\rangle. \tag{3.3.3}$$

Ceci entraîne (1). De façon similaire, on obtient la condition (2) :

$$\Theta_{0,e_j,0}(x,y) = \langle \int_{\sigma(N)} z^{e_j} dE(z)x,y\rangle = \langle N^{e_j}x,y\rangle = \langle T^{e_j}x,y\rangle.$$

Pour la propriété (3), on a :

$$\Theta_{e_j,e_j,0}(x,x) = \langle \int_{\sigma(N)} \bar{z}^{e_j} z^{e_j} dE(z)x,x\rangle = \langle N^{*e_j}N^{e_j}x,x\rangle = ||N^{e_j}x||^2 = ||T^{e_j}x||^2,$$

et

$$\langle N^{*e_j}N^{e_j}x,x\rangle = \langle \int_{\sigma(N)} \bar{z}^{e_j} dE(z)N^{e_j}x,x\rangle = \Theta_{e_j,0,0}(T^{e_j}x,x).$$

Et pour chaque $j \in \{1,\cdots,n\}$, l'égalité suivante est évidente :

$$\bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta} = \bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta-e_j} + \bar{z}^{\alpha+e_j}z^{\beta+e_j}(1+|z|^2)^{-\delta-e_j}.$$

Or cette relation appliquée au calcul fonctionnel de N entraîne trivialement (4). Enfin pour la condition (5), si on prend $\phi = \sum_{\alpha,\beta,\delta} \bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta} \otimes x_{\alpha,\beta,\delta}$ dans $\mathcal{F}\otimes\mathcal{D}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Lambda_\Theta(\phi,\phi) &= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(x_{\alpha,\beta,\delta},x_{\alpha',\beta',\delta'}) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \langle \int_{\sigma(N)} \bar{z}^{\alpha+\beta'}z^{\beta+\alpha'}(1+|z|^2)^{-\delta-\delta'}dE(z)x_{\alpha,\beta,\delta},x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle.
\end{aligned}$$

Cette dernière expresssion n'est autre que :

$$\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \langle \int_{\sigma(N)} \bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta}dE(z) \int_{\sigma(N)} \bar{z}^{\beta'}z^{\alpha'}(1+|z|^2)^{-\delta'}dE(z)x_{\alpha,\beta,\delta},x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle$$

Comme on sait que l'adjoint de l'opérateur $\int_{\sigma(N)} \bar{z}^{\beta'}z^{\alpha'}(1+|z|^2)^{-\delta'}dE(z)$ n'est autre que $\int_{\sigma(N)} \overline{\bar{z}^{\beta'}z^{\alpha'}(1+|z|^2)^{-\delta'}}dE(z)$, (voir [Du-Schw] théorème 6 p.1196), on obtient l'inégalité suivante :

$$\Lambda_\Theta(\phi,\phi) = ||\sum_{\alpha,\beta,\delta} \int_{\sigma(N)} \bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta}dE(z)x_{\alpha,\beta,\delta}||^2 \geq 0.$$

Pour l'implication réciproque, on suppose que Λ_Θ est semi-définie positive sur $\mathcal{F}\otimes\mathcal{D}$. Si on écrit chaque $z_j = u_j + iv_j$, alors $\mathcal{F}$ peut être vu comme l'algèbre des fractions rationelles à $2n$ variables réelles où les dénominateurs sont de la forme $\prod_{j=1}^n (1+u_j^2+v_j^2)^{\delta_j}$. On notera par $U_1,\cdots,U_n,V_1,\cdots,V_n$ les opérateurs multiplication par les variables indépendantes $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n$ respectivemenet sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\Theta$ (où $\mathcal{N}_\Theta$ est l'espace de tous les éléments $\phi \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{D}$ satisfaisant à $\Lambda_\Theta(\phi, \phi) = 0$). On peut vérifier que les opérateurs $(I + U_j^2 + V_j^2)$ sont positifs et avec le même domaine dense $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\Theta$, qui est en particulier invariant par chaque $U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n$ dans l'espace de HILBERT $\mathcal{H}_\Lambda$ associé à Λ_Θ (où $\mathcal{H}_\Lambda$ est la complétion de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\Theta$ et où $||.||_\Lambda$ est la norme hermitienne associée, pour plus de détails on peut se référer à [Ge-Na], [Du-Schw], [Fu], etc.). En effet, grâce à la linéarité de Λ_Θ et en utilisant le fait que les différentes variables $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n$ sont réelles, on obtient :

$$(3.3.4) \qquad \begin{aligned} \langle [I + U_j^2 + V_j^2]\phi, \phi\rangle_\Lambda &= \Lambda_\Theta([I + U_j^2 + V_j^2]\phi, \phi) \\ &= \Lambda_\Theta(\phi, \phi) + \Lambda_\Theta(u_j\phi, u_j\phi) + \Lambda_\Theta(v_j\phi, v_j\phi) \\ &= ||\phi||_\Lambda^2 + ||u_j\phi||_\Lambda^2 + ||v_j\phi||_\Lambda^2 \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, ces opérateurs $(I + U_j^2 + V_j^2)$ sont inversibles sur leur domaine de définition puisque l'algèbre $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les fractions rationnelles avec des dénominateurs de ce type. L'invariance de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\Theta$ est également évidente. Egalement, pour chaque $(j, k) \in \{1, \cdots, n\}^2$, en utilisant la commutativité de $U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n$, on a l'égalité suivante :

$$(3.3.5) \qquad \begin{aligned} W_{j,k} &= (I + U_j^2 + V_j^2)(I + U_k^2 + V_k^2) \\ &= I + U_j^2 + V_j^2 + U_k^2 + V_k^2 + (U_jU_k)^2 + (V_jV_k)^2 + (U_jV_k)^2 + (V_jU_k)^2. \end{aligned}$$

Grâce aux remarques précédentes, ces opérateurs $W_{j,k}$ sont tous positifs, inversibles et définis sur l'espace vectoriel dense $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\Theta$ qui est invariant par tous les $W_{j,k}$. On peut donc appliquer le lemme 2.2 de [Pu-Vas2], donc les fermetures canoniques $\overline{W_{j,k}}$ des $W_{j,k}$ sont des opérateurs auto-adjoints. Maintenant, en appliquant la proposition 2.1 de cette même référence (qui généralise un résultat de [Nel]), on obtient que les fermetures $\overline{U_j}$, $\overline{V_j}$, $\overline{U_k}$, $\overline{V_k}$, $\overline{U_jU_k}$, $\overline{V_jV_k}$, $\overline{U_jV_k}$, $\overline{V_jU_k}$, des U_j, V_j, U_k, V_k, U_jU_k, V_jV_k, U_jV_k, V_jU_k, respectivement, sont des opérateurs auto-adjoints commutatifs. En particulier, $\overline{U_j}$, $\overline{V_j}$, $\overline{U_k}$ et $\overline{V_k}$, commutent pour tout couple $(j, k) \in \{1, \cdots, n\}^2$. Finalement, on obtient que les opérateurs $U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n$ sont essentiellement auto-adjoints, et de plus leurs fermetures canoniques commutent. On pose alors les opérateurs :

$$(3.3.6) \qquad N_j = \overline{U_j} + i\overline{V_j}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Ces opérateurs $(N_1, \cdots, N_n)$ commutent et sont normaux. Soit F la mesure spectrale associée à cette famille d'opérateurs normaux. Alors, si $r(U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n)$ est l'opérateur défini sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}/\mathcal{N}_\Theta$ par :

$$r(U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n)(\phi + \mathcal{N}_\Theta) = r\phi + \mathcal{N}_\Theta,$$

pour tout $r \in \mathcal{F}$ et $\phi \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{D}$. Alors on obtient les inclusions suivantes :

$$(3.3.7) \qquad r(U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n) \subset r(\overline{U_1}, \cdots, \overline{U_n}, \overline{V_1}, \cdots, \overline{V_n}),$$

pour tout élément r dans $\mathcal{F}$ où $r(\overline{U_1}, \cdots, \overline{U_n}, \overline{V_1}, \cdots, \overline{V_n})$ est donné par le calcul fonctionnel de la famille commutative d'opérateurs auto-adjoints. En effet, si r est un polynôme, cette affirmation est triviale. Maintenant, soit $g_\beta = (1+u_1^2+v_1^2)^{-\beta_1}\cdots(1+u_n^2+v_n^2)^{-\beta_n}$ avec $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. On a $g_\beta(U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n) \subset g_\beta(\overline{U_1}, \cdots, \overline{U_n}, \overline{V_1}, \cdots, \overline{V_n})$, puisque :

$$g_\beta(\overline{U_1}, \cdots, \overline{V_n})[g_{-\beta}(U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n) - g_{-\beta}(\overline{U_1}, \cdots, \overline{U_n}, \overline{V_1}, \cdots, \overline{V_n})] = 0,$$

sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}$. En combinant les deux remarques précédentes, on obtient bien (3.3.7).

Maintenant, comme on a $\Lambda_\Theta(z^\alpha \otimes x, 1 \otimes y) = \langle N^\alpha(1 \otimes x), (1 \otimes y)\rangle$, on en déduit :

$$\Lambda_\Theta(z^\alpha \otimes x, 1 \otimes y) = \int_{\sigma(N)} z^\alpha dF_{1\otimes x, 1\otimes y}. \tag{3.3.8}$$

En utilisant le plongement naturel de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_\Lambda$, on peut identifier l'opérateur T_j dans $\mathcal{H}$ et l'opérateur défini par $1 \otimes x \to 1 \otimes T_j x$. En conclusion, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ et pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
||T_jx - N_jx||_\Lambda^2 &= ||T_jx||_\Lambda^2 + ||N_jx||_\Lambda^2 - 2\Re\langle T_jx, N_jx\rangle_\Lambda \\
&= \Theta_{e_j,e_j,0}(x,x) + \langle N_j^* N_j x, x\rangle_\Lambda - 2\Re\Theta_{0,e_j,0}(x, N_jx) \\
&= \Lambda_\Theta(z^{e_j} \otimes x, z^{e_j} \otimes x) + \int_{\sigma(N)} z^{e_j}\bar{z}^{e_j} dF_{1\otimes x, 1\otimes x} - 2\Re\Lambda_\Theta(z^{e_j} \otimes x, 1 \otimes N_jx) \\
&= 2\Lambda_\Theta(z^{e_j} \otimes x, z^{e_j} \otimes x) - 2\Lambda_\Theta(z^{e_j} \otimes x, 1 \otimes N_jx) = 0.
\end{aligned}$$

(où $\Re$ représente bien sûr la partie réelle d'un nombre complexe). Par conséquent, on a :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ T_jx = N_jx.$$

Le multi-opérateur $T|_\mathcal{D} = (T_1|_\mathcal{D}, \cdots, T_n|_\mathcal{D})$ admet donc bien une extension normale. ■

3.3.3 Remarque : Au début de cette section, à partir d'une $3n$-suite de formes sesquilinéaires, on a défini une forme hermitienne unitale Λ_Θ sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}$. De manière similaire, soit $\Delta = (\Delta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n}$ une $3n$-suite d'applications linéaires sur un sous-espace $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathcal{H}$, vérifiant pour chaque élément $(\alpha, \beta, \delta) \in (\mathbb{Z}_+^n)^3$ et pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&(iii) \quad \Delta_{0,0,0} = I|_\mathcal{D}, \\
&(iv) \quad \langle \Delta_{\alpha,\beta,\delta}x, y\rangle = \langle x, \Delta_{\beta,\alpha,\delta}y\rangle.
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Alors, on peut associer à cette multi-suite une forme hermitienne Λ_Δ sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}$ en posant pour tout couple (ϕ, ψ) dans $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{D})^2$ (avec les représentations $\phi = \sum_{\alpha,\beta,\delta} \bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta} \otimes x_{\alpha,\beta,\delta}$ et $\psi = \sum_{\alpha,\beta,\delta} \bar{z}^\alpha z^\beta(1+|z|^2)^{-\delta} \otimes y_{\alpha,\beta,\delta}$) :

$$\Lambda_\Delta(\phi, \psi) = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \langle \Delta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'} x_{\alpha,\beta,\delta}\ ,\ y_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle.$$

De plus, cette multi-suite Δ sera dite de *type positive* si la forme associée Λ_Δ est semi-définie positive.

3.3.4 Corollaire : *Soit $T = (T_1, \cdots, T_n)$ un multi-opérateur défini sur un espace de* Hilbert *$\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(T_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(T_n)$ un sous-espace, dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par chaque $T_1, \cdots, T_n$. Il existe un espace de* Hilbert *$\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{H}$ et un multi-opérateur normal $N = (N_1, \cdots, N_n)$ défini dans $\mathcal{K}$ tels que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(N_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(N_n)$ et $T_j x = N_j x$ pour tout élément x dans $\mathcal{D}$ et pour tout j dans $\{1, \cdots, n\}$ si et seulement si il existe une $3n$-suite $\Delta = (\Delta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta \in \mathbb{Z}_+^n}$ d'applications linéaires sur $\mathcal{D}$ vérifiant les cinq propriétés suivantes :*

- $(1')$ $\Delta_{0,0,0} = I|_{\mathcal{D}}$.
- $(2')$ $\Delta_{0,e_j,0} x = T^{e_j} x$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}$ *et pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$.
- $(3')$ $\langle \Delta_{e_j,e_j,0} x, x\rangle = \langle \Delta_{e_j,0,0} T^{e_j} x, x\rangle = ||T^{e_j} x||^2$, $j \in \{1, \cdots, n\}$, $x \in \mathcal{D}$.
- $(4')$ $\Delta_{\alpha,\beta,\delta} = \Delta_{\alpha,\beta,\delta+e_j} + \Delta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j}$ *pour tout* $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}_+^n$ *et pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$.
- $(5')$ Δ *est de type positive.*

Démonstration.
On suppose que $T|_{\mathcal{D}} = (T_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, T_n|_{\mathcal{D}})$ admette une extension normale N, définie dans un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ qui contient $\mathcal{H}$. Soit E la mesure spectrale associée à cette extension N et soit $P_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{H}$. On définit les opérateurs $\Delta_{\alpha,\beta,\delta}$ par :

$$\Delta_{\alpha,\beta,\delta} x = P_{\mathcal{H}} \int_{\sigma(N)} \bar{z}^\alpha z^\beta (1 + |z|^2)^{-\delta} dE(z) x, \quad \forall \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \forall x \in \mathcal{D}. \tag{3.3.10}$$

En posant les formes sesquilinéaires $\Omega_{\alpha,\beta,\delta}(x, y) = \langle \Delta_{\alpha,\beta,\delta} x, y\rangle$ pour tout $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x, y \in \mathcal{D}$, on obtient une $3n$-suite $\Omega = (\Omega_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta \in \mathbb{Z}_+^n}$ de formes sesquilinéaires sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. On peut vérifier sans trop de difficultés que les propriétés $(1')$-$(5')$ sont bien satisfaites, ce sont les mêmes types de calculs que dans le théorème 3.3.2 (en utilisant en plus la densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$).

Pour l'implication inverse, il suffit d'utiliser le théorème 3.3.2 avec la $3n$-suite $\Omega = (\Omega_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta \in \mathbb{Z}_+^n}$ de formes sesquilinéaires sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ définie ci-dessus. Les conditions (iii) et (iv) sur la multi-suite Δ impliquent clairement les conditions (i) et (ii) sur la multi-suite Ω. Il en est de même pour les hypothèses $(1')$-$(5')$ sur Δ qui impliquent que Ω vérifie les hypothèses (1)-(5) du théorème 3.3.2. ■

Les résultats de cette section nous donne des conditions nécessaires et suffisantes pour décider si un multi-opérateur $T|_{\mathcal{D}} = (T_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, T_n|_{\mathcal{D}})$ est ou non, sous-normal. Néanmoins, dans ces formes, ces conditions ne sont pas assez explicites puisqu'elles ne dépendent pas uniquement du multi-opérateur donné $T|_{\mathcal{D}}$ mais aussi de l'existence d'une multi-suite de formes sesquilinéaires ou d'applications linéaires, avec des propriétés particulières. Dans la suite, on va donner des applications plus précises et plus explicites où ces critères peuvent s'appliquer, des situations où n'interviennent que des conditions sur le multi-opérateur donné $T|_{\mathcal{D}}$.

Avant de donner un autre critère de sous-normalité, on donne un exemple où ces derniers résultats s'appliquent. On va donner des relations entre la sous-normalité d'un multi-opérateur (où chaque opérateur « coordonnée » est inversible) et la sous-normalité du multi-opérateur défini par leurs inverses. Même si on connaît des résultats pour un opérateur (voir le corollaire 2 de [St-Sz2]), le résultat semble être nouveau pour des uplets d'opérateurs. Il existe des uplets d'opérateurs permutables sous-normaux qui n'admettent pas d'extension normale. A. LUBIN a donné un exemple d'un couple d'opérateurs sous-normaux n'ayant pas d'extension normale (jointe) (voir [Lub2] et [Abr], voir aussi [Lub3]).

3.3.5 Corollaire : *Soit $T = (T_1, \cdots, T_n)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* HILBERT *$\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace dense inclus dans $\cap_{i=1}^n \mathcal{D}(T_i)$ tel que $T_i\mathcal{D} = \mathcal{D}$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. On suppose que chaque T_i est bijectif sur $\mathcal{D}$. Alors, $T|_{\mathcal{D}} = (T_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, T_n|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal si et seulement si $T^{-1}|_{\mathcal{D}} = (T_1^{-1}|_{\mathcal{D}}, \cdots, T_n^{-1}|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal.*

Démonstration.
Si le multi-opérateur $T|_{\mathcal{D}}$ est sous-normal, il existe une $3n$-suite de formes linéaires définies sur $\mathcal{D}$, $(\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ vérifiant les propriétés (1) à (5) du théorème 3.3.2 (comme $T|_{\mathcal{D}}$ est sous-normal, $T|_{\mathcal{D}}$ est également permutable. On peut donc décrire sans ambiguïté les puissances de $T|_{\mathcal{D}}$). On peut décrire une de ces multi-suites (voir (3.3.2)) :

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(x,y) = \langle \int_{\sigma(N)} \bar{z}^\alpha z^\beta (1+|z|^2)^{-\delta} dE(z)x, y\rangle, \quad \forall \alpha,\beta,\delta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2,$$

où E est la mesure spectrale associée à l'extension normale N de $T|_{\mathcal{D}}$. Dans un premier temps, on peut donner deux propriétés supplémentaires vérifiées par cette multi-suite : pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}^2$ et pour $j = 1, \cdots, n$, on a :

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha,\beta,\delta}(T_j x, y) &= \langle \int_{\sigma(N)} \bar{z}^\alpha z^\beta (1+|z|^2)^{-\delta} dE(z) N_j x, y\rangle \\ &= \langle \int_{\sigma(N)} \bar{z}^\alpha z^{\beta+e_j} (1+|z|^2)^{-\delta} dE(z)x, y\rangle = \Theta_{\alpha,\beta+e_j,\delta}(x,y). \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

De façon similaire, on a également pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}^2$ et pour $j = 1, \cdots, n$:

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(x, T_j y) = \Theta_{\alpha+e_j,\beta,\delta}(x,y).$$

Maintenant, on définit la multi-suite $\Delta = (\Delta_{\alpha,\beta,\delta})$ de formes sesquilinéaires sur $\mathcal{D}$, par l'égalité suivante :

$$\Delta_{\alpha,\beta,\delta}(x,y) = \Theta_{\alpha,\beta,\delta}(T^{\delta-2\beta}x, T^{\delta-2\alpha}y), \quad \forall \alpha,\beta,\delta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2. \tag{3.3.12}$$

Alors, on va vérifier que cette nouvelle multi-suite satisfait aux conditions (1) à (5) du théorème 3.3.2 pour le multi-opérateur $T^{-1}|_{\mathcal{D}} = (T_1^{-1}|_{\mathcal{D}}, \cdots, T_n^{-1}|_{\mathcal{D}})$. Dans un premier temps, on a évidemment :

$$\Delta_{0,0,0}(x,y) = \Theta_{0,0,0}(x,y) = \langle x, y\rangle.$$

En ce qui concerne la propriété (2), il suffit de voir :

$$\Delta_{0,e_j,0}(x,y) = \Theta_{0,e_j,0}(T_j^{-2}x,y) = \langle T_jT_j^{-2}x,y\rangle = \langle T_j^{-1}x,y\rangle.$$

La troisième relation découle des deux séries d'égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta_{e_j,e_j,0}(x,x) &= \Theta_{e_j,e_j,0}(T_j^{-2}x,T_j^{-2}x) = ||T_j^{-1}x||^2 \\
\Delta_{e_j,0,0}(T_j^{-1}x,x) &= \Theta_{e_j,0,0}(T_j^{-1}x,T_j^{-2}x) = \Theta_{e_j,0,0}(T_jT_j^{-2}x,T_j^{-2}x) = ||T_j^{-1}x||^2.
\end{aligned}$$

La quatrième s'obtient grâce au calcul qui suit, pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
& -\Delta_{\alpha,\beta,\delta}(x,y) + \Delta_{\alpha,\beta,\delta+e_j}(x,y) + \Delta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j}(x,y) \\
= \;& -\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(T^{\delta-2\beta}x,T^{\delta-2\alpha}y) + \Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_j}(T^{\delta+e_j-2\beta}x,T^{\delta+e_j-2\alpha}y) \\
& +\Theta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j}(T^{\delta-e_j-2\beta}x,T^{\delta-e_j-2\alpha}y) \\
= \;& -\Theta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta}(T^{\delta-e_j-2\beta}x,T^{\delta-e_j-2\alpha}y) + \Theta_{\alpha+2e_j,\beta+2e_j,\delta+e_j}(T^{\delta-e_j-2\beta}x,T^{\delta-e_j-2\alpha}y) \\
& +\Theta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j}(T^{\delta-e_j-2\beta}x,T^{\delta-e_j-2\alpha}y). \\
= \;& -\Theta_{a,b,c}(u,v) + \Theta_{a+e_j,b+e_j,c+e_j}(u,v) + \Theta_{a,b,c+e_j}(u,v) = 0,
\end{aligned}$$

où on a posé $a = \alpha+e_j$, $b = \beta+e_j$, $c = \delta$, $u = T^{\delta-e_j-2\beta}x$ et $v = T^{\delta-e_j-2\alpha}y$. Enfin, pour la condition de positivité, on doit montrer que, pour toute famille presque nulle $x = (x_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ d'éléments dans $\mathcal{D}$, la somme $\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \Delta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(x_{\alpha,\beta,\delta}, x_{\alpha',\beta',\delta'})$ est positive. Soient $\alpha_0 = (max\{\alpha_1\},\cdots,max\{\alpha_n\})$ et $\beta_0 = (max\{\beta_1\},\cdots,max\{\beta_n\})$. Alors, cette somme peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(T^{\delta+\delta'-2\beta-2\alpha'}x_{\alpha,\beta,\delta}, T^{\delta+\delta'-2\beta'-2\alpha}x_{\alpha',\beta',\delta'}) \\
& = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(T^{\delta+\delta'-2\beta_0-2\alpha_0+2(\beta_0-\beta)+2(\alpha_0-\alpha')}x_{\alpha,\beta,\delta}, \\
& \qquad\qquad T^{\delta+\delta'-2\beta_0-2\alpha_0+2(\beta_0-\beta')+2(\alpha_0-\alpha)}x_{\alpha',\beta',\delta'}) \\
& = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \Theta_{\alpha+\beta'+\delta+2(\alpha_0-\alpha),\beta+\alpha'+\delta'+2(\alpha_0-\alpha'),\delta+\delta'}(T^{\delta-2\beta_0-2\alpha_0+2(\beta_0-\beta)}x_{\alpha,\beta,\delta}, \\
& \qquad\qquad T^{\delta'-2\beta_0-2\alpha_0+2(\beta_0-\beta')}x_{\alpha',\beta',\delta'}).
\end{aligned}$$

Donc, si l'on pose $a = \alpha+\delta+2(\alpha_0-\alpha)$, $b = \beta$, $c = \delta$, et $y_{a,b,c} = T^{\delta-2\beta_0-2\alpha_0+2(\beta_0-\beta)}x_{\alpha,\beta,\delta}$, la formule précédente n'est autre que :

$$\sum_{a,b,c,a',b',c'} \Theta_{a+b',b+a',c+c'}(y_{a,b,c}, y_{a',b',c'})$$

qui est positif puisque Θ satisfait à la propriété (5). Par conséquent, on peut appliquer le théorème 3.3.2. Ceci entraîne que le multi-opérateur $T^{-1}|_{\mathcal{D}} = (T_1^{-1}|_{\mathcal{D}},\cdots,T_n^{-1}|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal.

De manière évidente, vu ce qui vient d'être démontré, $T^{-1}|_{\mathcal{D}}$ sous-normal implique que $T|_{\mathcal{D}}$ est sous-normal également. ■

3.3.6 Remarque : Dans le corollaire précédent, on ne suppose pas que les inverses des opérateurs $(T_i|_{\mathcal{D}})_i$ soient bornés. Ce théorème est une généralisation d'un résultat obtenu dans [St-Sz2] en 1989 (voir corollaire 2b), où le cas d'un seul opérateur a été étudié. On peut noter que ce corollaire peut se démontrer directement par la proposition suivante :

3.3.7 Proposition : *Soit $T = T_1, \cdots, T_n$ un multi-opérateur défini dans un espace de* HILBERT *$\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{D}$ un sous-espace dense vérifiant $\mathcal{D} \subset \cap_{j=1}^n \mathcal{D}(T_j)$ et $T_j(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Si T est sous-normal et chaque T_j inversible sur D, on a pour tout $x \in \mathcal{D}$:*

$$T_j^{-1}x = \int_{\sigma(N)} g_j(z)dE(z,\overline{z})x, \quad j = 1, \cdots, n,$$

où N est une extension normale de T de mesure spectrale E et où la fonction g_j est donnée par : $g_j(z) = z_j^{-1}\chi_{\{z_j \neq 0\}}(z)$. En particulier, le multi-opérateur $T^{-1}|_{\mathcal{D}} = (T_1^{-1}|_{\mathcal{D}}, \cdots, T_n^{-1}|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal.

Démonstration.
Les fonctions $(g_j)_j$ sont des fonctions boréliennes, définies sur $\mathbb{C}^n$, on peut donc définir les opérateurs K_j grâce au calcul fonctionnel par les égalités suivantes :

$$K_j = \int_{\sigma(N)} g_j(z)dE(z,\overline{z}), \quad j = 1, \cdots, n.$$

On pose alors les fonctions $\phi_{m,j} : z \to z_j^{-1}\chi_{\{|z_j| \geq 1/m\}}(z)$. On a évidemment la suite $(\phi_{m,j}(z))_m$ qui converge vers $g_j(z)$ quand m tend vers $+\infty$. Soit $x \in \mathcal{D}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(N)} \phi_{m,j}(z)dE(z,\overline{z})x &= \int_{\sigma(N)} \phi_{m,j}(z)dE(z,\overline{z})T_jT_j^{-1}x \\
&= \int_{\sigma(N)} \phi_{m,j}(z)dE(z,\overline{z}) \int_{\sigma(N)} z_j dE(z,\overline{z})T_j^{-1}x \\
&= \int_{\sigma(N)\cap\{|z_j|\geq 1/m\}} 1dE(z,\overline{z})T_j^{-1}x = E(\{|z_j| \geq 1/m\})T_j^{-1}x.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression converge vers $E(\{z_j \neq 0\})T_j^{-1}x$. En particulier, on montre l'inclusion $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(K_j)$ et $K_jx = E(\{z_j \neq 0\})T_j^{-1}x$. Si on note par P_j la projection orthogonale $E(\{z_j \neq 0\})$, on veut montrer que $P_jx = x$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. Pour ce faire, on pose $y = T_j^{-1}x$, et on obtient :

$$\begin{aligned} P_j x &= E(\{z_j \neq 0\})x = E(\{z_j \neq 0\})T_j T_j^{-1}x = E(\{z_j \neq 0\})N_j y \\ &= E(\{z_j \neq 0\}) \int_{\sigma(N)} z_j dE(z, \overline{z})y = \int_{\{z_j \neq 0\}} z_j dE(z, \overline{z})y \\ &= \int_{\sigma(N)} z_j dE(z, \overline{z})y = N_j y = T_j y = x. \end{aligned}$$

Et donc on obtient le résultat voulu. ∎

De prime abord, on aurait eu envie de prendre des extensions minimales, pour obtenir des extensions normales également inversibles. Malheureusement, ceci est délicat dans le cas non borné (voir en particulier [St-Sz3]), même pour un seul opérateur. De plus, même si on obtient des résultats sur une notion de minimalité pour des multi-opérateurs (voir la dernière section), on obtiendra des conditions sur le spectre joint. Or ici, il faudrait que chaque composante de l'extension normale soit inversible.

3.3.8 Exemple : Si $z_1, \cdots, z_n$ sont des nombres complexes non nuls tels que leurs modules vérifient $|z_1|^{-1} < 1, \cdots, |z_n|^{-1} < 1$, on a l'égalité :

$$\overline{z}^{\alpha}(1 + |z|^2)^{-\delta} z^{\beta} = \sum_{\kappa \geq 0} f_{\kappa}(\delta) \overline{z}^{\alpha-\delta-\kappa} z^{\beta-\delta-\kappa}, \tag{3.3.13}$$

pour tout multi-indice positif α, β, δ, κ, où on pose $f_\kappa(\delta) = \prod_{i=1}^{n} a_{\kappa_i}(\delta_i)$, avec $(a_k(0))_{k\geq 0} = (1, 0, \cdots)$ et $a_k(m) = (-1)^k (m + k - 1)! [m!(k-1)!]^{-1}$ pour $m \neq 0$. Les séries sont absolument convergentes. Cette représentation suggère la définition suivante : soit $T = (T_1, \cdots, T_n)$ un multi-opérateur non borné, et soit $\mathcal{D}$ un sous-espace dense inclus dans $\mathcal{D}(T_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(T_n)$ tel que T soit commutatif sur $\mathcal{D}$. On suppose, de plus, que chaque élément composant T est inversible et que la norme de chaque T_i^{-1} est strictement plus petite que 1. On suppose, enfin, que $T_i\mathcal{D} = \mathcal{D}$ pour tout entier i. Alors, on peut construire explicitement une multi-suite de formes sesquilinéaires Θ : on peut définir pour tout multi-indice positif α, β, δ et pour chaque couple (x, y) dans $\mathcal{D}^2$:

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(T)(x, y) = \sum_{\kappa \geq 0} f_\kappa(\delta) \langle T^{\beta-\delta-\kappa}x, T^{\alpha-\delta-\kappa}y \rangle. \tag{3.3.14}$$

Les conditions sur les normes des T_i^{-1} impliquent que les séries (3.3.14) sont absolument convergentes. De plus, on peut vérifier que les propriétés (1) à (4) du théorème 3.3.2 sont bien satisfaites.

<u>Proposition :</u> *Soit $T = (T_1, \cdots, T_n)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* HILBERT $\mathcal{H}$ *et soit $\mathcal{D}$ un sous-espace dense vérifiant $\mathcal{D} \subset \cap_{j=1}^{n} \mathcal{D}(T_j)$ et $T_j(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Supposons que chaque T_j admette un inverse de norme strictement plus petite que 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est sous-normal

(*ii*) $\sum_{I,J\geq 0}\langle T^{-I}x_J, T^{-J}x_I\rangle \geq 0,$ *pour toute famille presque nulle de $\mathcal{D}$*

(*iii*) $\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'}\sum_{|k|\geq 0} f_k(\delta+\delta')\langle T^{\alpha'+\beta-\delta-\delta'-k}x_{\alpha,\beta,\delta}, T^{\alpha+\beta'-\delta-\delta'-k}x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle \geq 0,$ *pour toute famille presque nulle de $\mathcal{D}$*

Démonstration.

Pour l'équivalence entre (*i*) et (*ii*), il nous suffit d'utiliser le critère de Itô (appliqué aux opérateurs inverses qui sont continus) combiné avec le corollaire 3.3.5. Le fait que (*iii*) implique (*i*) provient du théorème 3.3.2. En effet, si on utilise les $\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(T)(x,y)$ définies plus haut au (3.3.14), on a déjà affirmé que les propriétés (1) à (4) de ce théorème étaient vérifiées. Il est facile de voir que la condition (5) est équivalente à l'hypothèse de positivité (*iii*). Il ne nous reste plus qu'à prouver que la sous-normalité implique la positivité (*iii*). Avec les notations de la proposition 3.3.7, la somme (*iii*) devient :

$$\sum\sum_{|k|\geq 0} f_k(\delta+\delta')\langle\int z^{\alpha'+\beta}g(z)^{\delta+\delta'+k}dE(z,\overline{z})x_{\alpha,\beta,\delta}, \int z^{\alpha+\beta'}g(z)^{\delta+\delta'+k}dE(z,\overline{z})x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle,$$

où bien sûr on pose $g(z)=(g_1(z),\cdots,g_n(z))$, pour tout $z\in\mathbb{C}^n$. Cette expression peut s'écrire également :

$$\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'}\sum_{|k|\geq 0} f_k(\delta+\delta')\langle\int z^{\alpha'+\beta}\overline{z}^{\alpha+\beta'}|g(z)|^{2\delta+2\delta'+2k}dE(z,\overline{z})x_{\alpha,\beta,\delta}, x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle$$

$$=\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'}\sum_{|k|\geq 0} f_k(\delta+\delta')\langle\int |g(z)|^{2\delta+2\delta'+2k}dE(z,\overline{z})T^{\alpha'+\beta}x_{\alpha,\beta,\delta}, T^{\alpha+\beta'}x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle.$$

De plus, on a la série à coefficients positifs suivante :

$$\sum_{|k|\geq 0}(-1)^{|k|}f_k(\delta+\delta')\int |g(z)|^{2\delta+2\delta'+2k}d\langle E(z,\overline{z})T^{\alpha'+\beta}x_{\alpha,\beta,\delta}, T^{\alpha+\beta'}x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle$$

$$\leq \sum_{|k|\geq 0}(-1)^{|k|}f_k(\delta+\delta')||T^{-1}||^{2\delta+2\delta'+2k}||T^{\alpha'+\beta}x_{\alpha,\beta,\delta}||.||T^{\alpha+\beta'}x_{\alpha',\beta',\delta'}||$$

$$\leq \frac{||T^{\alpha'+\beta}x_{\alpha,\beta,\delta}||.||T^{\alpha+\beta'}x_{\alpha',\beta',\delta'}||}{(1-||T_1^{-1}||^2)^{\delta_1+\delta_1'}\cdots(1-||T_n^{-1}||^2)^{\delta_n+\delta_n'}}||T^{-1}||^{2\delta+2\delta'}$$

Grâce à la convergence précédente, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour obtenir que la formule (*iii*) peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'}\langle\int\sum_{|k|\geq 0} f_k(\delta+\delta')z^{\alpha'+\beta}\overline{z}^{\alpha+\beta'}|g(z)|^{2\delta+2\delta'+2k}dE(z,\overline{z})x_{\alpha,\beta,\delta}, x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle.$$

Si on définit la fonction $h_a(z)=\sum_{|k|\geq 0} f_k(a)|g(z)|^{2k}$, cette fonction est intégrable donc définie presque partout pour la mesure $d\langle E(z,\overline{z})x_{\alpha,\beta,\delta}, x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle = d\mu(z,\overline{z})$. En effet, on a :

$$\int |h_a(z)|d\mu(z,\overline{z}) \leq \int \sum_{|k|\geq 0}(-1)^{|k|}f_k(a)|g(z)|^{2k}d\mu(z,\overline{z})$$

$$\leq \frac{||T^{\alpha'+\beta}x_{\alpha,\beta,\delta}||.||T^{\alpha+\beta'}x_{\alpha',\beta',\delta'}||}{(1-||T_1^{-1}||^2)^{a_1}\cdots(1-||T_n^{-1}||^2)^{a_n}} < +\infty.$$

Il en est de même pour la fonction $\sum_{|k|\geq 0}|f_k(a)|.|g(z)|^{2k}$. On fait le produit de Dirichlet de $h_a(z)$ et de $h_b(z)$ pour obtenir :

$$\sum_{|k|\geq 0} f_k(a)|g(z)|^{2k}\sum_{|k|\geq 0} f_k(b)|g(z)|^{2k} = \sum_{|k|\geq 0} f_k(a+b)|g(z)|^{2k}.$$

Par conséquent, la série (iii) devient :

$$\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'}\langle\int z^{\alpha'+\beta}\overline{z}^{\alpha+\beta'}h_\delta(z)h_{\delta'}(z)|g(z)|^{2\delta+2\delta'}dE(z,\overline{z})x_{\alpha,\beta,\delta},x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle$$

$$=\sum\langle\int z^{\beta}\overline{z}^{\alpha}h_\delta(z)|g(z)|^{2\delta}dE(z,\overline{z})x_{\alpha,\beta,\delta},\int z^{\beta'}\overline{z}^{\alpha'}h_{\delta'}(z)|g(z)|^{2\delta'}dE(z,\overline{z})x_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle$$

$$=||\sum_{\alpha,\beta,\delta}\int z^{\beta}\overline{z}^{\alpha}h_\delta(z)|g(z)|^{2\delta}dE(z,\overline{z})x_{\alpha,\beta,\delta}||^2\geq 0.$$

Et donc, la sous-normalité de T implique bien la condition (iii). ■

On utilise, maintenant, le théorème 3.2.2 sur la sous-normalité formelle jointe pour obtenir un nouveau critère de sous-normalité pour des multi-opérateurs non bornés. On étudiera à nouveau des multi-opérateurs avec des domaines communs denses qui restent invariants par chaque opérateur composant le n-uplet. Pour ce faire, on adapte la démonstration du théorème 3 de J. Stochel et F.H. Szafraniec donnée dans [St-Sz2]. Mais avant ceci, on a besoin d'un résultat sur les extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques (voir le théorème 4.1 de [Sli] pour deux opérateurs symétriques et des résultats de R.T. Powers dans [Po]).

3.3.9 Définition : Soit $S=(S_1,\cdots,S_m)$ un m-uplet d'opérateurs symétriques définis sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace linéaire dense qui reste invariant par chaque S_i, tel que $S_iS_j=S_jS_i$ sur $\mathcal{D}$ $(i,j=1,\cdots,m)$. Soit, aussi, $\mathcal{A}$ l'algèbre de tous les éléments de la forme $p(S_1,\cdots,S_m)$ où p décrit les polynômes en m variables. On dira que l'algèbre $\mathcal{A}$ est *complétement fortement positive* sur $\mathcal{D}$ (voir définition 5.4 de [Po]) si l'implication suivante est vraie :

on suppose que $(p_{i,j})_{i,j\geq 0}$ est une famille finie de polynômes en m variables telle que pour tout $(x_1,\cdots,x_m)$ on a :

$$\sum_{i,j\geq 0}p_{i,j}(x_1,\cdots,x_m)\overline{\lambda}_i\lambda_j\geq 0,\quad \forall\lambda_i\in\mathbb{C}, \tag{3.3.15}$$

Alors, on a pour toute famille finie $(f_i)_i$ dans $\mathcal{D}$:

$$\sum_{i,j\geq 0}\langle p_{i,j}(S_1,\cdots,S_m)f_i,f_j\rangle\geq 0. \tag{3.3.16}$$

3.3.10 Lemme : *Soit $A = (A_1, \cdots, A_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* HILBERT *séparable $\mathcal{H}$ tel que chaque A_i soit symétrique. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace linéaire dense qui reste invariant par chaque A_i, tel que $A_iA_j = A_jA_i$ sur $\mathcal{D}$ $(i, j = 1, \cdots, m)$. Si l'algèbre engendrée par les $(A_i)_i$ est complétement fortement positive sur $\mathcal{D}$, les opérateurs $(A_i|_{\mathcal{D}})_{i=1,\cdots,m}$ admettent des extensions qui sont auto-adjointes telles que leurs mesures spectrales commutent.*

Démonstration.
Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de tous les polynômes en $(A_1, \cdots, A_m)$. Soit également, I une représentation de cette algèbre $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rcccl} I & : & \mathcal{A} & \to & \text{Opérateurs sur } \mathcal{D} \\ & & T & \to & T|_{\mathcal{D}}. \end{array}$$

Alors l'identité I est une représentation auto-adjointe de la $*$-algèbre $\mathcal{A}$ sur l'espace de HILBERT $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{A}$ est complétement fortement positive sur $\mathcal{D}$, en appliquant le corollaire 5.5 de [Po], I est une représentation standard. Donc, les opérateurs $A_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, A_m|_{\mathcal{D}}$ sont essentiellement auto-adjoints et leurs fermetures canoniques admettent des projections spectrales qui commutent. ■

3.3.11 Théorème : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans un espace de* HILBERT *séparable $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense inclus dans $\mathcal{H}$ tel que $S_i(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ et $S_iS_j = S_jS_i$ sur $\mathcal{D}$ $(i, j = 1, \cdots, m)$. Alors, le multi-opérateur $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal si et seulement si on a l'implication suivante :*
Si $\{a_{i,j}^{P,Q}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad P, Q \in \mathbb{Z}_+^m\}$ est une famille finie de nombres complexes,

$$(i) \qquad \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\, \overline{\lambda_i}\, \lambda_j\, \overline{z}^Q\, z^P \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^m,$$

implique l'inégalité

$$(ii) \qquad \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} \sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\, \langle S^{K+P} f_{j,L}, S^{L+Q} f_{i,K} \rangle \geq 0,$$

où $\{f_{i,K}, i \in \mathbb{Z}_+, K \in \mathbb{Z}_+^m\}$ est une famille presque nulle d'éléments dans $\mathcal{D}$.

Démonstration.
On suit la preuve du théorème 3 dans [St-Sz2], en utilisant le théorème 3.2.2 et le lemme précédent 3.3.10. Afin de faciliter la lecture, on écrira tous les détails de la démonstration. Premièrement, on suppose que $S|_{\mathcal{D}}$ admette une extension normale N. Comme $\mathcal{D}$ est invariant par chaque S_j, on a l'inclusion $\mathcal{D} \subset \cap_{j=1,\cdots,m} \mathcal{D}^\infty(N_j)$. De plus, on a $\mathcal{D} \subset \cap_{j=1,\cdots,m} \mathcal{D}^\infty(N_j^*)$. En effet, par le théorème 6 p.1196 de [Du-Schw], on a pour un multi-opérateur normal :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}^\alpha(N) \quad &\Leftrightarrow \int |z^\alpha|^2 \langle dE(\overline{z}, z)x, x\rangle < +\infty \Leftrightarrow \int |\overline{z}^\alpha|^2 \langle dE(\overline{z}, z)x, x\rangle < +\infty \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}^\alpha(N^*). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{P}(\overline{z}, z)$ le polynôme $\sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\, \overline{\lambda_i}\, \lambda_j\, \overline{z}^Q\, z^P$, et on suppose qu'il ne prend que des valeurs positives pour tout $z = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, où les $(\lambda_i)_i$ sont des nombres complexes. Alors, on obtient pour toute famille $\{f_{i,K}, i \in \mathbb{Z}_+, K \in \mathbb{Z}_+^m\}$ presque nulle dans $\mathcal{D}$:

$$\sum_{i,j\geq 0}\sum_{P,Q\geq 0}\sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\langle S^{K+P}f_{j,L}, S^{L+Q}f_{i,K}\rangle = \sum_{i,j\geq 0}\sum_{P,Q\geq 0}\sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\langle N^{K+P}f_{j,L}, N^{L+Q}f_{i,K}\rangle$$

$$= \sum_{i,j\geq 0}\sum_{P,Q\geq 0}\sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\,\langle N^P N^{*L}f_{j,L}, N^Q N^{*K}f_{i,K}\rangle.$$

Si on pose $h_i = \sum_{K\geq 0} N^{*K}f_{i,K}$ pour tout $i \geq 0$, l'expression précédente devient :

$$\sum_{i,j\geq 0}\sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \quad \langle N^P h_j, N^Q h_i\rangle. \tag{3.3.17}$$

Enfin, si l'on pose

$$\mathbf{P}_{i,j}(\overline{z}, z) = \sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\,\overline{z}^Q\, z^P, \tag{3.3.18}$$

la formule du départ peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i,j\geq 0}\langle \mathbf{P}_{i,j}(N, N^*)h_j, h_i\rangle = \sum_{i,j\geq 0}\int \mathbf{P}_{i,j}(\overline{z}, z)d\langle E(\overline{z}, z)h_j, h_i\rangle, \tag{3.3.19}$$

où E est la mesure spectrale associée au multi-opérateur N. On définit maintenant la mesure μ par :

$$\mu(\tau) = \sum_{i=1}^{l}\langle E(\tau)h_i, h_i\rangle, \quad \forall \tau \in Bor(\mathbb{C}^m).$$

Bien sûr, cette mesure est positive. Par le théorème de Radon-Nikodyn, on montre que toutes les mesures complexes $\langle E(*)h_i, h_j\rangle$ $(i, j = 1, \cdots, l)$ sont absolument continues et donc il existe une famille $(\mathbf{F}_{i,j})$ de fonctions boréliennes qui vérifie :

$$\langle E(\tau)h_i, h_j\rangle = \int_\tau \mathbf{F}_{i,j}(\overline{z}, z)d\mu(\overline{z}, z),$$

pour tout borélien de $\mathbb{C}^m$. Si $(\lambda_i)_{i=1,\cdots,l}$ est une famille de nombres complexes, on a :

$$\int_\tau \sum_{i,j=1}^{l} \mathbf{F}_{i,j}(\overline{z}, z)\overline{\lambda_i}\lambda_j d\mu(\overline{z}, z) = \sum_{i,j=1}^{l}\overline{\lambda_i}\lambda_j\langle E(\tau)h_i, h_j\rangle = \langle E(\tau)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i h_i, E(\tau)\sum_{j=1}^{l}\lambda_j h_j\rangle.$$

Comme ceci est vrai pour tout τ, on en déduit l'inégalité :

$$\sum_{i,j=1}^{l}\mathbf{F}_{i,j}(\overline{z}, z)\overline{\lambda_i}\lambda_j \geq 0, \tag{3.3.20}$$

ceci μ-presque partout. Donc la matrice $(\mathbf{F}_{i,j}(\overline{z}, z))_{i,j}$ est positive quelles que soient les valeurs de $z \in supp(\mu)$. Si la propriété (i) est supposée, on obtient :

$$\sum_{i,j\geq 0}\overline{\lambda_i}\,\lambda_j\mathbf{P}_{i,j}(\overline{z}, z) \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^m,$$

et donc la matrice $(\mathbf{P}_{i,j}(\overline{z},z))_{i,j}$ est également positive. Par une propriété classique du produit de SCHUR, on obtient que la matrice $(\mathbf{P}_{i,j}\mathbf{F}_{i,j})$ est positive μ-presque partout. En appliquant ce résultat à la famille de nombres complexes $(1,\cdots,1)$, on a alors :

$$\sum_{i,j=1}^{l} \mathbf{F}_{i,j}(\overline{z},z)\mathbf{P}_{i,j}(\overline{z},z) \geq 0, \quad \mu\text{-presque partout.} \tag{3.3.21}$$

Or on a la relation suivante :

$$\sum_{i,j\geq 0} \langle \mathbf{P}_{i,j}(N,N^*)h_j,h_i\rangle = \sum_{i,j\geq 0} \int \mathbf{F}_{i,j}(\overline{z},z)\mathbf{P}_{i,j}(\overline{z},z)d\mu(\overline{z},z) \geq 0.$$

Ceci achève la démonstration de la première implication.

Supposons maintenant que (i) implique (ii), et prenons comme famille de nombres complexes $a_{0,0}^{0,0} = 1$ et $a_{i,j}^{P,Q} = 0$ si non. Alors l'expression (i) devient $|\lambda_0|^2$. Par conséquent, on obtient par l'implication :

$$\sum_{K,L\geq 0} \langle S^K f_{0,L}, S^L f_{0,K}\rangle \geq 0,$$

pour toute famille presque nulle $\{f_{0,K}, K \in \mathbb{Z}_+^m\}$ dans $\mathcal{D}$. Donc S vérifie le critère de ITÔ sur $\mathcal{D}$. Grâce à la proposition 3.2.2, il existe un multi-opérateur formellement normal $N = (N_1,\cdots,N_m)$ (vérifiant les conditions (i)-(iii) de cette proposition) qui prolonge $S|_{\mathcal{D}}$. Chaque opérateur N_j peut se mettre sous la forme $A_j + iB_j$ où $A_j = (N_j + N_j^*)/2$ et $B_j = (N_j - N_j^*)/2i$ sont des opérateurs symétriques ayant pour domaines $\mathcal{D}(N_j) = \mathcal{D}(A_j) = \mathcal{D}(B_j)$. Grâce à ces propriétés (i)-(iii), ces opérateurs $A_1,\cdots,A_m,B_1,\cdots,B_m$ sont commutatifs sur $\mathcal{D}'$ (où $\mathcal{D}'$ est défini dans la proposition 3.2.2). De plus, par le lemme 3.3.10, il nous suffit de montrer que ces opérateurs sont complètement fortement positifs sur $\mathcal{D}'$. Soit $(\mathbf{P}_{i,j})_{i,j}$ un nombre fini de polynômes en $2m$ variables tels que pour chaque $(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)$ on ait :

$$\sum_{i,j\geq 0} \mathbf{P}_{i,j}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)\overline{\lambda}_i\lambda_j \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}. \tag{3.3.22}$$

Alors on en déduit, pour tout f_i dans $\mathcal{D}'$:

$$\sum_{i,j\geq 0} \langle \mathbf{P}_{i,j}(A_1,\cdots,A_m,B_1,\cdots,B_m)f_i,f_j\rangle = \sum_{i,j\geq 0} \langle \mathbf{Q}_{i,j}(N,N^*)f_i,f_j\rangle$$

où :

$$\mathbf{Q}_{i,j}(\overline{z},z) = \mathbf{P}_{i,j}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m) = \sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\, \overline{z}^Q\, z^P \geq 0, \tag{3.3.23}$$

si $z_j = x_j + iy_j$. Par conséquent, on obtient :

$$\sum_{i,j\geq 0} \langle \mathbf{Q}_{i,j}(N,N^*)f_i,f_j\rangle = \sum_{i,j\geq 0}\sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \langle N^P N^{*Q} f_i, f_j\rangle.$$

En utilisant la remarque 3.2.3, chaque f_i peut s'écrire $\sum_L N^{*L} g_{i,L}$ avec $g_{i,L} \in \mathcal{D}$. On en déduit que l'expression précédente devient :

$$\sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} \sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \langle N^P N^{*Q} N^{*L} g_{i,L}, N^{*K} g_{j,K} \rangle.$$

En utilisant la propriété (iii) de la proposition 3.2.2, on a :

$$\sum_{i,j\geq 0} \langle \mathbf{Q}_{i,j}(N,N^*) f_i, f_j \rangle = \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} \sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \langle S^{P+K} g_{i,L}, S^{Q+L} g_{j,K} \rangle \geq 0.$$

En conclusion, la famille $(A_1, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_m)$, qui est commutative sur $\mathcal{D}'$, est complètement fortement positive sur ce même espace. Il nous suffit alors d'appliquer le lemme 3.3.10 pour obtenir la sous-normalité voulue, en posant bien sûr $N_j = \overline{A_j} + i\overline{B_j}$ $(j = 1, \cdots, m)$. ■

Comme conséquence directe de cette caractérisation, on peut donner une autre preuve du corollaire 3.3.5 basée sur la méthode employée par J. Stochel et F.H. Szafraniec dans le corollaire 2 de [St-Sz2].

<u>Autre démonstration du corollaire 3.3.5. :</u>
Soit $(a_{i,j}^{P,Q})$ une famille presque nulle de nombres complexes telle que l'on ait :

$$\sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \, \overline{\lambda_i} \, \lambda_j \, \overline{z}^Q \, z^P \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^m.$$

Dans ces conditions, il existe un multi-indice N qui majore tous les (P,Q) tel que $a_{i,j}^{P,Q} \neq 0$. On définit alors une nouvelle famille en posant : $b_{i,j}^{P,Q} = a_{i,j}^{N-P,N-Q}$. Alors, on vérifie :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} b_{i,j}^{P,Q} \, \overline{\lambda_i} \, \lambda_j \, \overline{z}^Q \, z^P &= \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{N-P,N-Q} \, \overline{\lambda_i} \, \lambda_j \, \overline{z}^Q \, z^P \\
&= \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P',Q'\geq 0} a_{i,j}^{P',Q'} \, \overline{\lambda_i} \, \lambda_j \, \overline{z}^{N-Q'} \, z^{N-P'} \\
&= |z|^{2N} \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P',Q'\geq 0} a_{i,j}^{P',Q'} \, \overline{\lambda_i} \, \lambda_j \left(\frac{1}{\overline{z}}\right)^{Q'} \left(\frac{1}{z}\right)^{P'} \geq 0
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Ceci est valable dès que chaque coordonnée de z est non nulle. Dans le cas contraire, on reprend le même procédé en ne s'occupant que des coordonnées non nulles de z. Si on suppose maintenant que le multi-opérateur $S|_{\mathcal{D}}$ est sous-normal, on doit montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} \sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \, \langle (S^{-1})^{K+P} f_{j,L}, (S^{-1})^{L+Q} f_{i,K} \rangle \geq 0.$$

Comme la famille $(a_{i,j}^{P,Q})$ est presque nulle, on choisit un multi-indice R tel que $a_{i,j}^{P,Q}$ ne soit pas nul uniquement lorsque $P, Q \leq R$. On pose alors les vecteurs $g_{j,L} =$

$(S^{-1})^{N+R} f_{j,R-L}$ pour tout j entier et pour tout $L \geq 0$ (on a une famille finie en L). Dans ces conditions, la partie de gauche dans l'expression précédente devient :

$$\sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} \sum_{K,L\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \langle (S^{-1})^{K+P} S^{N+R} g_{j,R-L}, (S^{-1})^{L+Q} S^{N+R} g_{i,R-K}$$

(3.3.25)
$$= \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} \sum_{K',L'\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \langle S^{N+K'-P} g_{j,L'}, (S^{-1})^{N+L'-Q} g_{i,K'} \rangle$$

$$= \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P',Q'\geq 0} \sum_{K',L'\geq 0} b_{i,j}^{P',Q'} \langle S^{K'+P'} g_{j,L'}, S^{L'+Q'} g_{i,K'} \rangle.$$

Grâce au théorème 3.3.11, cette dernière équation est positive puisque $S|_{\mathcal{D}}$ est sous-normal et que l'on a la positivité de $\sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} b_{i,j}^{P,Q} \overline{\lambda_i} \lambda_j \overline{z}^Q z^P$, par ce qui a été fait précédemment. On en conclut que le multi-opérateur $(S_1^{-1}|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m^{-1}|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal par le théorème 3.3.11. Ceci prouve le corollaire 3.3.5. ∎

Si $(\eta_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille arbitraire de vecteurs dans un espace $\mathcal{H}$, on notera par $Vect(\eta_\alpha)_{\alpha\in A}$ l'espace vectoriel engendré par cette famille.

3.3.12 Notation : On commence par donner quelques notations qui simplifieront les écritures. Si Kr désigne le symbole de Kronecker sur $\mathbb{Z}$, pour tous multi-indices $I = (i_1, \cdots, i_m)$ et $J = (j_1, \cdots, j_m)$ dans $\mathbb{Z}^m$, on notera par $Kr(I, J)$ la valeur suivante :

$$Kr(I, J) = Kr(i_1, j_1) \cdots Kr(i_m, j_m).$$

3.3.13 Exemple : Nous allons maintenant donner un exemple de multi-opérateur sur lequel le théorème 3.3.11 s'applique. On reprend un exemple de Stochel et Szafraniec (voir entre autres [St-Sz2], [St-Sz3], [Ot]) que l'on adapte au cas de plusieurs variables. On se place dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m)$. On définit la famille de fonctions de Chebyshev-Hermite (voir [Ak-Gl]) dans le cas de plusieurs variables :

(3.3.26)
$$f_P(x_1, \cdots, x_m) = e^{(x_1^2+\cdots+x_m^2)/2} \frac{\partial^{|P|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_m^{p_m}} (e^{-(x_1^2+\cdots+x_m^2)}), \quad \forall P \geq 0.$$

On définit $\mathcal{H}$ comme étant le complété de l'espace engendré par les $(f_P)_{P\geq 0}$ en accord avec la norme de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m)$. On pose alors, sur l'espace vectoriel $Vect(f_P)_{P\geq 0}$, le multi-opérateur commutatif $A = (A_1, \cdots, A_m)$ défini par :

(3.3.27)
$$A_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j - \frac{\partial}{\partial x_j}); \quad j = 1, \cdots, m.$$

On a alors pour tout multi-indice P positif :
(3.3.28)
$$\begin{aligned} \sqrt{2} A_j(f_P) &= x_j f_P - x_j f_P - e^{(x_1^2+\cdots+x_m^2)/2} \frac{\partial^{|P|+1}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_j^{p_j+1} \cdots \partial x_m^{p_m}} (e^{-(x_1^2+\cdots+x_m^2)}) \\ &= -f_{P+e_j}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on montre donc que :

$$A^N(f_P) = \Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)^{|N|} f_{P+N}, \quad \forall P, N \geq 0. \tag{3.3.29}$$

On en conclut que A est un multi-shift à poids commutatif (que l'on peut appeler *multi-opérateur de création*, en accord avec la dénomination de STOCHEL et SZAFRANIEC). En remarquant que, pour chaque fonction de notre famille, on peut séparer les variables et en utilisant les calculs de [Ak-Gl], on a pour tout couple de multi-indices positifs (P, Q) :

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_P(t) f_Q(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } P \neq Q \\ 2^{|P|} P! \sqrt{\pi}^m & \text{si non,} \end{cases} \tag{3.3.30}$$

où bien entendu $P! = p_1! \cdots p_m!$.

Si $\{a_{i,j}^{P,Q},\ i,j \in \mathbb{Z}_+,\ P,Q \in \mathbb{Z}_+^m\}$ est une famille finie de nombres complexes qui vérifie :

$$\sum_{i,j \geq 0} \sum_{P,Q \geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\, \overline{\lambda_i}\, \lambda_j\, \overline{z}^Q\, z^P \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^m.$$

Soit $(g_{j,L})_{j,L}$ une famille finie de vecteurs de l'ensemble de définition du multi-opérateur étudié. Alors, pour tout couple $(j, L) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+^m$, on peut écrire $g_{j,L} = \sum_{M \geq 0} b_{j,L,M} f_M$ (les $(f_M)_M$ étant justement les fonctions de CHEBYSHEV-HERMITE). Pour appliquer le théorème 3.3.11, on doit prouver que l'expression suivante est positive :

$$\sum_{i,j \geq 0} \sum_{P,Q \geq 0} \sum_{K,L \geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \langle A^{K+P} g_{j,L}, A^{L+Q} g_{i,K} \rangle. \tag{3.3.31}$$

Par ce qui vient d'être dit, l'expression précédente (3.3.31) peut s'écrire :

$$\sum_{i,j \geq 0} \sum_{P,Q \geq 0} \sum_{K,L \geq 0} \sum_{M,N \geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\, b_{j,L,M} \overline{b_{i,K,N}} \langle A^{K+P} f_M, A^{L+Q} f_N \rangle.$$

En utilisant la formule (3.3.29), on obtient pour (3.3.31) :

$$\sum_{i,j \geq 0} \sum_{P,Q \geq 0} \sum_{K,L \geq 0} \sum_{M,N \geq 0} a_{i,j}^{P,Q}\, b_{j,L,M} \overline{b_{i,K,N}} \Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)^{|K+P+L+Q|} \langle f_{M+K+P}, f_{N+L+Q} \rangle.$$

Grâce à la formule intégrale (3.3.30), la formule (3.3.31) n'est autre que :

$$\sum a_{i,j}^{P,Q}\, b_{j,L,M}\, \overline{b_{i,K,N}} \Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)^{|K+P+L+Q|} 2^{|M+K+P|} (M+K+P)!$$

$$\times \sqrt{\pi}^m Kr(M+K+P, N+L+Q),$$

où Kr est défini à partir du symbole de KRONECKER (voir notation 3.3.12). De plus comme tous les multi-indices sont positifs, on peut travailler sur leur module sans danger. On obtient donc comme écriture équivalente à (3.3.31) :

$$\sum a_{i,j}^{P,Q}\, b_{j,L,M} \overline{b_{i,K,N}} (-1)^{|K+P+L+Q|} \sqrt{2}^{|M+N|} (M+K+P)! \sqrt{\pi}^m Kr(M+K+P, N+L+Q).$$

On va maintenant transformer la formule précédente en utilisant des reésentations intégrales. Il est bien connu que $(n!)$ est une suite de moments de Steiltjes. On a donc :

$$p_1! \cdots p_m! = \int_{\mathbb{R}_+^m} t_1^{p_1} \cdots t_m^{p_m} e^{-(t_1+\cdots+t_m)} dt_1 \cdots dt_m. \tag{3.3.32}$$

De la même manière, on transforme le symbole de KRONECKER :

$$Kr(M+K+P, N+L+Q) = \int_{\mathbb{T}^m} u^{M+K+P}\overline{u}^{N+L+Q} d\sigma(u_1, \cdots, u_m), \tag{3.3.33}$$

où $\mathbb{T}$ est le Tore et où σ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^m$. Alors, gâce à (3.3.32) et (3.3.33), l'expression (3.3.31) devient maintenant :

$$\sum a_{i,j}^{P,Q} \quad b_{j,L,M}\overline{b_{i,K,N}}(-1)^{|K+P+L+Q|}\sqrt{2}^{|M+N|}\sqrt{\pi}^m \int_{\mathbb{R}_+^m} t^{M+K+P} e^{-(t_1+\cdots+t_m)} dt_1 \cdots dt_m$$
$$\times \int_{\mathbb{T}^m} u^{M+K+P}\overline{u}^{N+L+Q} d\sigma(u).$$

On peut, de plus, remarquer que lorsque $M+K+P = N+L+Q$, l'expression $(-1)^{|K+P+L+Q|}$ peut s'écrire $(-1)^{|K+P+L+Q+M+K+P+N+L+Q|}$, ce qui n'est rien d'autre que $(-1)^{|M+N|}$. En utilisant le changement de variables $t_j = x_j^2$ pour $(j = 1, \cdots, m)$, l'expression (3.3.31) peut se mettre sous la forme :

$$\sum a_{i,j}^{P,Q}\, b_{j,L,M}\, \overline{b_{i,K,N}}\, (-1)^{|M+N|}\, \sqrt{2}^{|M+N|}\, \sqrt{\pi}^m \int_{\mathbb{T}^m} u^{M+K+P}\overline{u}^{N+L+Q} d\sigma(u)$$
$$\times \int_{\mathbb{R}_+^m} x^{M+K+P} x^{N+L+Q} 2^m x_1 \cdots x_m e^{-(x_1^2+\cdots+x_m^2)} dx_1 \cdots dx_m.$$

Si on note $d\rho(x,u)$ la mesure $2^m x_1 \cdots x_m e^{-(x_1^2+\cdots+x_m^2)} dx_1 \cdots dx_m d\sigma(u)$ et si l'on pose :

$$\lambda_j(x,u) = \sum_{L,M\geq 0} b_{j,L,M}(-\sqrt{2})^{|M|} u^M \overline{u}^L x^{M+L},$$

l'expression (3.3.31) devient :

$$\sqrt{\pi}^m \int_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{T}^m} \sum_{i,j\geq 0} \sum_{P,Q\geq 0} a_{i,j}^{P,Q} \lambda_j(x,u) \quad \overline{\lambda_i(x,u)} (xu)^P (\overline{xu})^Q d\rho(x,u),$$

où la multi-variable (xu) est bien évidemment $(x_1u_1, \cdots, x_mu_m)$. Par notre hypothèse, la fonction que l'on intégre est toujours positive. Il s'ensuit que son intégrale vérifie la même propriété (et donc aussi (3.3.31)). Par conséquent, on a bien prouvé qu'ici la condition (i) du théorème 3.3.11 implique la condition (ii). On peut appliquer ce théorème pour conclure que notre multi-opérateur est sous-normal. Pour une autre preuve de ceci, on peut se référer à l'exemple 3.4.21 où l'on applique le théorème 3.4.3 sur des familles de Shifts à poids. ∎

Maintenant que l'on a donné trois caractérisations de la sous-normalité jointe pour les multi-opérateurs non bornés, on va mettre à profit deux d'entre elles pour donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un $(m+p)$-uplet formé de deux uplets sous-normaux reste sous-normal. En général cette propriété est fausse, même pour deux opérateurs : il existe des opérateurs commutatifs bornés sous-normaux tels que le bi-opérateur formé ne soit pas sous-normal (voir, pour plus de détails et un exemple, [Lub2]).

Ceci nous permet également de donner une application au corollaire 3.3.4.

3.3.14 Théorème : *Soient $T|_{\mathcal{D}} = (T_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, T_m|_{\mathcal{D}})$ et $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_p|_{\mathcal{D}})$ deux multi-opérateurs sous-normaux (où $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(T_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(T_m) \cap \mathcal{D}(S_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(S_p)$ est un sous-espace vectoriel dense et invariant par chaque S_i et chaque T_j). Le multi-opérateur $(T_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, T_m|_{\mathcal{D}}, S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_p|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal si et seulement si il existe une famille de formes sesquilinéaires $\Theta = (\Theta_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1})_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1 \geq 0}$ (associée à $T|_{\mathcal{D}}$) vérifiant les conditions du théorème* 3.3.2 *et une famille d'opérateurs non bornés $\Delta = (\Delta_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2})_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2 \geq 0}$ (associée à $S|_{\mathcal{D}}$) vérifiant les conditions du corollaire* 3.3.4 *telles que, pour chaque famille presque nulle de vecteurs $(x_{a,b,d})_{a,b,d}$ dans $\mathcal{D}$, on ait :*

$$\sum_{a,b,d,a',b',d'} \Theta_{\alpha_1+\beta'_1,\beta_1+\alpha'_1,\delta_1+\delta'_1}(\Delta_{\alpha_2+\beta'_2,\beta_2+\alpha'_2,\delta_2+\delta'_2} x_{a,b,d}, x_{a',b',d'}) \geq 0, \tag{3.3.34}$$

où a, b, et d sont, respectivement, les multi-indices (α_1, α_2), (β_1, β_2) et (δ_1, δ_2).

Démonstration.

On va appliquer le théorème 3.3.2 (on utilisera également toutes les notations utilisées pour les résultats 3.3.2 et 3.3.4). Pour ce faire, on définit la famille de formes sesquilinéaires $\Psi = (\Psi_{a,b,d})_{a,b,d \geq 0}$ par l'égalité :

$$\Psi_{a,b,d}(x,y) = \Theta_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1}(\Delta_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2} x, y), \tag{3.3.35}$$

où $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $b = (\beta_1, \beta_2)$ et $d = (\delta_1, \delta_2)$ sont dans $\mathbb{Z}_+^{m+p}$. Pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{D}^2$, on a $\Psi_{0,0,0}(x,y) = \Theta_{0,0,0}(\Delta_{0,0,0} x, y) = \langle x, y \rangle$. Ceci nous donne la condition (1) du théorème 3.3.2. Pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$, on définit $f_{j,0}$ par $(e_j, 0, \cdots, 0)$ où $(e_1, \cdots, e_m)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^m$. De manière similaire, soit $f_{0,k} = (0, \cdots, 0, c_k)$ où $(c_1, \cdots, c_p)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^p$. Alors, on a :

$$\Psi_{0,f_{j,0},0}(x,y) = \Theta_{0,e_j,0}(x,y) = \langle T_j x, y \rangle. \tag{3.3.36}$$

De manière semblable, on obtient :

$$\Psi_{0,f_{0,k},0}(x,y) = \Theta_{0,0,0}(\Delta_{0,c_k,0} x, y) = \langle S_k x, y \rangle. \tag{3.3.37}$$

Par conséquent, la condition (2) est aussi satisfaite. En ce qui concerne la troisième, soit $x \in \mathcal{D}$, on peut écrire :

$$\Psi_{f_{j,0},f_{j,0},0}(x,x) = \Theta_{e_j,e_j,0}(x,x) = ||T_j x||^2 = \Theta_{e_j,0,0}(T_j x, x) = \Psi_{f_{j,0},0,0}(T_j x, x).$$

On a également :

$$\Psi_{f_{0,k},f_{0,k},0}(x,x) = \langle \Delta_{c_k,c_k,0} x, x \rangle = ||S_k x||^2 = \langle \Delta_{c_k,0,0} S_k x, x \rangle = \Psi_{f_{0,k},0,0}(S_k x, x).$$

Pour la quatrième condition, on sait :

$$\begin{aligned}
&\Psi_{a,b,d+f_{j,0}}(x,y) + \Psi_{a+f_{j,0},b+f_{j,0},d+f_{j,0}}(x,y) \\
&= \Theta_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1+e_j}\ (\Delta_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2}x,y) + \Theta_{\alpha_1+e_j,\beta_1+e_j,\delta_1+e_j}(\Delta_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2}x,y) \\
&= \Theta_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1}(\Delta_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2}x,y) = \Psi_{a,b,d}(x,y).
\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

De plus, on vérifie aussi :

$$\begin{aligned}
&\Psi_{a,b,d+f_{0,k}}(x,y) + \Psi_{a+f_{0,k},b+f_{0,k},d+f_{0,k}}(x,y) \\
&= \Theta_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1}(\Delta_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2+c_k}x,y) + \Theta_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1}(\Delta_{\alpha_2+c_k,\beta_2+c_k,\delta_2+c_k}x,y) \\
&= \Theta_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1}((\Delta_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2+c_k} + \Delta_{\alpha_2+c_k,\beta_2+c_k,\delta_2+c_k})x,y) \\
&= \Theta_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1}(\Delta_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2}x,y) = \Psi_{a,b,d}(x,y).
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Enfin, on peut remarquer que la dernière condition pour pouvoir appliquer le théorème 3.3.2 est exactement la positivité supposée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b,d,a',b',d'} \Psi_{a+b',b+a',d+d'}(x_{a,b,d}, x_{a',b',d'}) \\
&= \sum_{a,b,d,a',b',d'} \Theta_{\alpha_1+\beta_1',\beta_1+\alpha_1',\delta_1+\delta_1'}(\Delta_{\alpha_2+\beta_2',\beta_2+\alpha_2',\delta_2+\delta_2'}x_{a,b,d}, x_{a',b',d'}) \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

Pour l'implication inverse, on prend une extension normale $(N_{[1]}, N_{[2]})$ de $(S|_{\mathcal{D}}, T|_{\mathcal{D}})$. Il suffit alors d'utiliser la commutativité des mesures spectrales des deux multi-opérateurs normaux $N_{[1]}$ et $N_{[2]}$ qui sont des extensions normales de $S|_{\mathcal{D}}$ et $T|_{\mathcal{D}}$ respectivement. C'est exactement comme dans le théorème 3.3.2 et le corollaire 3.3.4. ■

Enfin pour terminer cette section dédiée à la sous-normalité jointe, on va s'occuper de quelques cas particuliers : on s'intéressera à des multi-opérateurs dont les vecteurs analytiques sont denses dans $\mathcal{H}$.

3.3.15 Définition : Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur vérifiant $S_iS_jx = S_jS_ix$ pour tout x dans $\mathcal{D}(S_iS_j) \cap \mathcal{D}(S_jS_i)$. En accord avec la définition pour le cas d'un seul opérateur, on dira qu'un élément f est un *vecteur analytique* ($f \in \mathcal{A}(S)$) si $f \in \mathcal{D}^\infty(S_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}^\infty(S_m)$ et vérifie :

$$\sum_{P \geq 0} \frac{||S^P f||}{P!} t^P < +\infty, \tag{3.3.41}$$

pour un élément $t = (t_1, \cdots, t_m)$ de $(\mathbb{R}_+^*)^m$. On peut vérifier que $\mathcal{A}(S)$ est un espace vectoriel invariant pour la composition par les S_i, $i = 1, \cdots, m$.

3.3.16 Lemme : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur de $\mathcal{H}$ tel que le domaine commun de chaque S_i ($i = 1, \cdots, m$) soit $\mathcal{D}(S_i) = \mathcal{D} = \mathcal{A}(S)$ et que S soit commutaif* *sur $\mathcal{D}$. On suppose de plus que pour tout $f \in \mathcal{D}$, il existe une mesure positive μ_f à support dans $\mathbb{R}_+^m$ ayant des moments à tous les ordres telle que l'on ait :*

$$(3.3.42) \qquad ||S^P f||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_f(t) \quad \forall P \geq 0.$$

Alors, il existe des mesures complexes $\mu_{f,g}$ $(f, g \in \mathcal{D})$ vérifiant les conditions suivantes :

(*i*) $\mu_{af} = |a|^2 \mu_f, \quad a \in \mathbb{C}$

(*ii*) $\mu_{f,f} = \mu_f$

(*iii*) $\langle S^P f, S^P g\rangle = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_{f,g}(t) \quad \forall P \geq 0$

(*iv*) $\mu_{f,g}(\sigma) = \overline{\mu_{g,f}(\sigma)}, \quad \forall \sigma \in Bor(\mathbb{R}_+^m)$

(*v*) *$\mu_{f,g}$ est linéaire par rapport au premier indice et antilinéaire par rapport au second.*

Démonstration.

Afin de simplifier les notations, on notera $\alpha_P = ||S^P f||^2$. D'après l'hypothèse, on obtient en particulier pour tout $j = 1, \cdots, m$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_{ne_j}^{1/2}}{n!} t_j^n < +\infty.$$

Ceci implique que (voir par exemple [St-Sz2]) :

$$\sum_{n \geq 1} \alpha_{ne_j}^{-1/2n} = +\infty.$$

Par le critère de Carleman, la suite $(\alpha_{ne_j})_{n \geq 0}$ est une suite de moments de Stieltjes déterminée (voir [S-T]). Ceci est vrai pour tout $j = 1, \cdots, m$. Par un résultat de L.C. Petersen (voir [Pet], théorème 3), la multi-suite $(\alpha_P)_{P \geq 0}$ est également déterminée. Or, nous avons :

$$||S^P(af)||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_{af}(t) = |a|^2 ||S^P f||^2 = |a|^2 \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_f(t), \quad \forall P \geq 0.$$

Et donc par unicité de la mesure de représentation, on a l'égalité (*i*). Par similarité avec la formule de polarisation, on définit les mesures complexes :

$$(3.3.43) \quad \mu_{f,g}(\sigma) = \frac{1}{4}\Big[\mu_{f+g}(\sigma) - \mu_{f-g}(\sigma) + i\mu_{f+ig}(\sigma) - i\mu_{f-ig}(\sigma)\Big], \quad \forall \sigma \in Bor(\mathbb{R}_+^m).$$

On obtient alors pour tout multi-indice positif P :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_{f,f}(t) &= ||S^P f||^2 + \tfrac{1}{4}||S^P(f+if)||^2 - \tfrac{1}{4}||S^P(f-if)||^2 \\ &= ||S^P f||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_f(t). \end{aligned}$$

Et à nouveau, par unicité de la mesure de représentation, on a la relation (ii). La formule (iii) provient directement de la construction des mesures qui est la même que la formule de polarisation. De plus, on a les trois égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} ||S^P(g-f)||^2 = ||S^P(f-g)||^2, \\ \\ ||S^P(g+if)||^2 = ||S^P(f-ig)||^2, \\ \\ ||S^P(g-if)||^2 = ||S^P(f+ig)||^2. \end{array}\right. \tag{3.3.44}$$

Par unicité de la mesure de représentation, ces trois égalités donnent $\mu_{g-f} = \mu_{f-g}$, $\mu_{g+if} = \mu_{f-ig}$ et $\mu_{g-if} = \mu_{f+ig}$. On obtient finalement par (3.3.43) :

$$\mu_{f,g}(\sigma) = \overline{\mu_{g,f}(\sigma)}, \quad \forall \sigma \in Bor(\mathbb{R}_+^m).$$

Il ne reste plus qu'à prouver la linéarité par rapport au premier indice et l'antilinéarité par rapport au second. On décompose cette partie en quatre étapes :

Etape 1 : $\mu_{f+h,g} = \mu_{f,g} + \mu_{h,g}$

Comme on a $\langle S^P(f+h), S^P g\rangle = \langle S^P f, S^P g\rangle + \langle S^P h, S^P g\rangle$, en utilisant la formule de polarisation de $\mu_{f,g}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} t^P (d\mu_{f+h+g} - d\mu_{f+h-g} + id\mu_{f+h+ig} - id\mu_{f+h-ig})$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P (d\mu_{f+g} - d\mu_{f-g} + id\mu_{f+ig} - id\mu_{f-ig} + d\mu_{h+g} - d\mu_{h-g} + id\mu_{h+ig} - id\mu_{h-ig}).$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\nu_1 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\nu_2 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\nu_3 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\nu_4, \tag{3.3.45}$$

où les mesures ν_1, ν_2, ν_3 et ν_4 sont positives et données par les formules :

$$\left\{\begin{array}{l} \nu_1 = \mu_{f+h+g} + \mu_{f-g} + \mu_{h-g} \\ \\ \nu_2 = \mu_{f+h-g} + \mu_{f+g} + \mu_{h+g} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \nu_3 = \mu_{f+h+ig} + \mu_{f-ig} + \mu_{h-ig}, \\ \\ \nu_4 = \mu_{f+h-ig} + \mu_{f+ig} + \mu_{h+ig}. \end{array}\right.$$

Si on pose $\alpha_P = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\nu_1 = ||S^P(f+h+g)||^2 + ||S^P(f-g)||^2 + ||S^P(h-g)||^2$, les vecteurs $f+h+g$, $f-g$ et $h-g$ sont des vecteurs analytiques. Donc il existe des nombres réels t_{f+h+g}, t_{f-g} et t_{h-g} tels que l'on ait $\sum_{P\geq 0} ||S^P k|| t_k^P/P! < +\infty$, pour $k = f+h+g, f-g, h-g$. Par conséquent, on obtient l'inégalité suivante :

$$\sum_{P\geq 0} \frac{\alpha_P^{1/2}}{P!} t_{inf}^P \leq \sum_{P\geq 0} \frac{||S^P(f+h+g)|| + ||S^P(f-g)|| + ||S^P(h-g)||}{P!} t_{inf}^P < +\infty.$$

Par la remarque initiale, la multi-suite $(\alpha_P)_{P\geq 0}$ est une suite déterminée de moments. On en déduit que $\nu_1 = \nu_2$ car les deux mesures sont positives. De la même manière, on prouve que $\nu_3 = \nu_4$. A nouveau, en utilisant l'écriture de polarisation, on a :

$$\mu_{f+h,g} = \mu_{f,g} + \mu_{h,g}. \tag{3.3.46}$$

Etape 2 : $\mu_{af,g} = a\mu_{f,g}$ pour $a \in \mathbb{R}_+$.
A nouveau, on démarre d'une égalité triviale : $a\langle S^P f, S^P g\rangle = \langle S^P(af), S^P g\rangle$. On obtient le même genre de décomposition que précédemment avec :

$$\begin{cases} \nu_1 = a\mu_{f+g} + \mu_{af-g} \\ \\ \nu_2 = a\mu_{f-g} + \mu_{af+g} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \nu_3 = a\mu_{f+ig} + \mu_{af-ig}, \\ \\ \nu_4 = a\mu_{f-ig} + \mu_{af+ig}. \end{cases}$$

Comme $\mathcal{A}(S)$ est un espace vectoriel, on peut réitérer le même procédé pour obtenir que $\nu_1 = \nu_2$ et $\nu_3 = \nu_4$. Ceci nous donne que $\mu_{af,g} = a\mu_{f,g}$.

Pour les deux dernières étapes, c'est à peu près la même méthode, on raisonne avec a négatif et pour $a = i$. La propriété (v) s'obtient alors en utilisant (iv). ■

On peut alors appliquer le lemme 3.3.16 pour obtenir une version amoindrie d'un résultat de [St-Sz2] (théorème 7) où le cas d'un seul opérateur a été traité par d'autres méthodes.

3.3.17 Théorème : *Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur défini dans $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}(S)$ un sous-espace dense et invariant tel que S est commutatif sur $\mathcal{D}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un multi-opérateur normal N de $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ tel que $||S^\alpha f|| = ||N^\alpha f||$ pour tout $f \in \mathcal{D}$ et pour tout $\alpha \geq 0$.

(ii) $||S^\alpha f||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^\alpha d\mu_f(t), \quad \forall \alpha \geq 0,\ f \in \mathcal{D}$, où les μ_f sont des mesures positives.

Démonstration.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Si E est la mesure spectrale de l'opérateur normal N, on a :

$$\begin{aligned} ||S^\alpha f||^2 &= ||N^\alpha f||^2 = \langle N_m^{*\alpha_m} \cdots N_1^{*\alpha_1} N_1^{\alpha_1} \cdots N_m^{\alpha_m} f, f\rangle \\ &= \int_{\mathbb{C}^m} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_m|^{2\alpha_m} d\langle E(z,\bar{z})f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^\alpha d\mu_f(t). \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Si ϕ est la fonction de $\mathbb{R}_+^m$ dans $\mathbb{R}_+^m$ définie par $\phi(t_1, \cdots, t_m) = (t_1^2, \cdots, t_m^2)$. On pose $\rho_{f,g}(\sigma) = \mu_{f,g}(\phi^{-1}(\sigma))$ pour tout borélien (les mesures utilisées proviennent des μ_f par la même méthode que dans le lemme précédent). On définit alors pour tout f et g dans $\mathcal{D}$:

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(f,g) = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^{\alpha+\beta}(1+t^2)^{-\delta} d\rho_{f,g}(t). \tag{3.3.47}$$

Par le lemme précédent, les formes $\Theta_{\alpha,\beta,\delta}$ sont des formes sesquilinéaires sur $\mathcal{D}$. De plus, on a :

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(f,g) = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^{\alpha+\beta}(1+t^2)^{-\delta} d\rho_{f,g}(t) = \overline{\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{\alpha+\beta}(1+t^2)^{-\delta} d\rho_{g,f}(t)} = \overline{\Theta_{\beta,\alpha,\delta}(g,f)}.$$

Donc la condition (ii) de l'introduction de cette section (voir (3.3.1)) est vérifiée. De plus, on peut noter que l'on a les deux égalités suivantes :

$$\Theta_{0,0,0}(f,g) = \int_{\mathbb{R}_+^m} d\mu_{f,g}(t) = \langle f, g\rangle \quad \text{et} \quad \Theta_{\alpha,\alpha,0}(f,f) = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^\alpha d\mu_{f,f}(t) = ||S^\alpha f||^2.$$

Bien sûr, on a également pour tout $j = 1, \cdots, m$: $\Theta_{\alpha,\beta,\delta} = \Theta_{\alpha+e_j,\beta+e_j,\delta+e_j} + \Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_j}$. Enfin, si $\psi = \sum \overline{z}^\alpha z^\beta (1+|z|^2)^{-\delta} \otimes x_{\alpha,\beta,\delta}$, on a :

$$\Lambda_\Theta(\psi,\psi) = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(x_{\alpha,\beta,\delta}, x_{\alpha',\beta',\delta'}). \tag{3.3.48}$$

En utilisant le théorème de dilatation de NAIMARK, il existe un espace de HILBERT $\mathcal{K}$, un opérateur $V : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ et une mesure spectrale E sur $\mathbb{R}_+^m$ dans $\mathcal{K}$ tels que l'on ait :

$$\mu_{f,g}(\sigma) = \langle E(\sigma)Vf, Vg\rangle, \quad f, g \in \mathcal{D}, \quad \sigma \in Bor(\mathbb{R}_+^m). \tag{3.3.49}$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\Lambda_\Theta(\psi,\psi) &= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \langle \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{\alpha+\beta'+\beta+\alpha'}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}} dE(t)Vx_{\alpha,\beta,\delta}, Vx_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \langle \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{\alpha+\beta}}{(1+t^2)^{\delta}} dE(t)Vx_{\alpha,\beta,\delta}, \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{\alpha'+\beta'}}{(1+t^2)^{\delta'}} dE(t)Vx_{\alpha',\beta',\delta'}\rangle \\
&= || \sum_{\alpha,\beta,\delta} \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{\alpha+\beta}}{(1+t^2)^{\delta}} dE(t)Vx_{\alpha,\beta,\delta}||^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Puis, on utilise la méthode du théorème 3.3.2 (voir également [Vas4] et [Vas5]) pour construire l'opérateur normal $N = (N_1, \cdots, N_m)$. La propriété sur $\Theta_{0,0,0}$ permet d'identifier $\mathcal{H}$ comme un sous-espace fermé de $\mathcal{K}$. Enfin, par la définition de la norme sur $\mathcal{K}$, on obtient l'égalité $\Theta_{\alpha,\alpha,0}(x,x) = ||N^\alpha x||_\Lambda^2$. Or nous avons vu que $\Theta_{\alpha,\alpha,0}(x,x) = ||S^\alpha x||^2$, d'où $||N^\alpha x||_\Lambda = ||S^\alpha x||$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. En effet, $N^\alpha(1\otimes x) = z^\alpha \otimes x$ et

$$||N^\alpha x||_\Lambda^2 = ||N^\alpha(1\otimes x)||_\Lambda^2 = \Lambda_\Theta(z^\alpha \otimes x, z^\alpha \otimes x) = \Theta_{\alpha,\alpha,0}(x,x) = ||S^\alpha x||^2. \tag{3.3.50}$$

■

Avec les mêmes méthodes, on peut donner un résultat sur des familles d'opérateurs symétriques (mais ici sans une égalité avec les normes).

3.3.18 Proposition : *Soit $B = (B_1, \cdots, B_m)$ un multi-opérateur de $\mathcal{H}$ composé d'opérateurs symétriques. Soit $\mathcal{D}$ un espace vectoriel dense inclus dans $\mathcal{A}(B)$. Il existe un espace de* HILBERT *$\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ et un multi-opérateur auto-adjoint $A = (A_1, \cdots, A_m)$ qui prolonge $B|_\mathcal{D}$ et dont le spectre joint est inclus dans $\mathbb{R}_+^m$ si et seulement si :*

(i) $||B^P x||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_x(t)$, $\forall x \in \mathcal{D}$ *et* $\forall P \geq 0$.

(ii) $\Lambda_\Theta(t_j\psi,\psi) \geq 0$, $\forall \psi = \sum t^\alpha(1+t^2)^{-\delta} \otimes x_{\alpha,\delta}$ *où* Λ_Θ *est définie comme dans le théorème* 3.3.2.

(iii) $\langle B_j x, y\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m_+} t_j d\rho_{x,y}(t)$ *où* $\rho_{x,y}$ *est la mesure associée à* x *et* y *(voir le lemme* 3.3.16*).*

Démonstration.
Si A est une extension auto-adjointe de $B|_\mathcal{D}$ et si E est la mesure spectrale de l'opérateur A, on a :

$$||B^P f||^2 = ||A^P f||^2 = \int_{\mathbb{R}^m} t^{2P} d\langle E(t)f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^m_+} t^P d\mu_f(t). \tag{3.3.51}$$

De plus, on a pour tout $j = 1, \cdots, m$:

$$\begin{aligned}\Lambda_\Theta(t_j\psi,\psi) &= \sum_{\alpha,\delta,\alpha',\delta'} \Theta_{\alpha+e_j+\alpha',\delta+\delta'}(x_{\alpha,\delta}, x_{\alpha',\delta'}) = \\ &\sum_{\alpha,\delta,\alpha',\delta'} \langle \int_{\mathbb{R}^m_+} \frac{t^{\alpha+e_j+\alpha'}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}} dE(t) x_{\alpha,\delta}, x_{\alpha',\delta'}\rangle \\ &= || \sum_{\alpha,\delta} \int_{\mathbb{R}^m_+} \frac{t^{\alpha+e_j/2}}{(1+t^2)^{\delta}} dE(t) x_{\alpha,\delta}||^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Enfin, on en conclut :

$$\langle B_j x, y\rangle = \langle A_j x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}^m_+} t_j d\langle E(t)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}^m_+} t_j d\rho_{x,y}(t). \tag{3.3.52}$$

Inversement, la même famille que dans le théorème précédent vérifie les propriétés (1), (3) et (5) du théorème 2.2 de [Vas4]. La propriété (2) est vérifiée par l'hypothèse *(iii)*. Pour (4), c'est la même astuce que précédemment. En utilisant le théorème Naimark, il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K}$, un opérateur $V : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ et une mesure spectrale E sur $\mathbb{R}^m_+$ dans $\mathcal{K}$ tels que l'on ait :

$$\begin{aligned}\Lambda_\Theta(t_j\psi,\psi) &= \sum_{\alpha,\delta,\alpha',\delta'} \langle \int_{\mathbb{R}^m_+} \frac{t^{\alpha+e_j+\alpha'}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}} dE(t) V x_{\alpha,\delta}, V x_{\alpha',\delta'}\rangle \\ &= || \sum_{\alpha,\delta} \int_{\mathbb{R}^m_+} \frac{t^{\alpha+e_j/2}}{(1+t^2)^{\delta}} dE(t) V x_{\alpha,\delta}||^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

Enfin, les positivités *(ii)* nous permettent de localiser le spectre de l'extension auto-adjointe dans $\mathbb{R}^m_+$. ■

3.3.19 Remarque : Les deux résultats précédents sont basés sur le lemme 3.3.16. On peut noter que dans ce lemme, on n'a pas besoin que les vecteurs soient analytiques dans le sens donné au (3.3.41) de la définition 3.3.15 mais uniquement dans le sens

$\sum_{n\geq 0}||S_j^n f||t_j^n/n! < +\infty$ pour $j = 1, \cdots, m$. En effet, c'est juste la finitude de ces séries qui nous permet d'appliquer le résultat de L.C. Petersen. Par contre, si on ne demande que la finitude de ces suites, on n'a plus l'invariance de l'espace par les S_j et on ne peut plus appliquer nos critères de sous-normalité.

On termine cette section avec une généralisation au cas multi-opératoriel de la proposition 3 de [St-Sz2] (voir aussi le théorème 35 de [St-Sz5]). Dans notre cas, nous appliquons une autre méthode basée sur le théorème 3.3.2.

3.3.20 Proposition : *Soit $S = (S_1, ..., S_n)$ un multi-opérateur ayant un vecteur cyclique f. Si on note l'espace vectoriel dense $\mathcal{D} = Vect\{S^\alpha f, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$, alors $S|_{\mathcal{D}}$ est sous-normal si et seulement si il existe une mesure positive μ à support dans $\mathbb{C}^n$ telle que l'on ait pour tous multi-indices α, β positifs :*

$$\langle S^\alpha f, S^\beta f\rangle = \int_{\mathbb{C}^m} z^\alpha \overline{z}^\beta d\mu(z, \overline{z}).$$

Démonstration.
Si $S|_{\mathcal{D}}$ est sous-normal (d'extension normale N), on obtient :

$$\langle S^\alpha f, S^\beta f\rangle = \langle N^{*\beta} N^\alpha f, f\rangle = \int_{\mathbb{C}^m} z^\alpha \overline{z}^\beta d\mu(z, \overline{z}),$$

where $d\mu(z, \overline{z}) = d\langle E(z, \overline{z})f, f\rangle$ and E is the spectral measure of N.

Réciproquement, pour tous multi-indices $\alpha, \beta, \delta, a, b$ dans $\mathbb{Z}_+^n$, on pose :

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^a f, S^b f) = \int_{\mathbb{C}^m} z^{\beta+a} \overline{z}^{\alpha+b} (1 + |z|^2)^{-\delta} d\mu(z, \overline{z}). \tag{3.3.54}$$

Comme le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}$ est invariant par les S_i $(i = 1, \cdots, n)$, peut essayer d'appliquer le thórème 3.3.2. On vérifie donc que la multi-suite $\Theta = (\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ vérifie les conditions (1) à (5) de ce théorème. Bien évidemment, on a :

$$\Theta_{0,0,0}(S^a f, S^b f) = \int_{\mathbb{C}^m} z^a \overline{z}^b d\mu(z, \overline{z}) = \langle S^a f, S^b f\rangle. \tag{3.3.55}$$

De plus, on vérifie facilement que :

$$\Theta_{0,e_j,0}(S^a f, S^b f) = \int_{\mathbb{C}^m} z^{a+e_j} \overline{z}^b d\mu(z, \overline{z}) = \langle S_j S^a f, S^b f\rangle, \tag{3.3.56}$$

qui est exactement la condition (2). Pour la troisième, on obtient :

$$\begin{cases} \Theta_{e_j,e_j,0}(S^a f, S^a f) = \int_{\mathbb{C}^m} z^{a+e_j} \overline{z}^{a+e_j} d\mu(z, \overline{z}) = ||S^{a+e_j} f||^2, \\ \text{et} \\ \Theta_{e_j,0,0}(S_j S^a f, S^a f) = \int_{\mathbb{C}^m} z^{a+e_j} \overline{z}^{a+e_j} d\mu(z, \overline{z}). \end{cases} \tag{3.3.57}$$

La propriété (4) découle directement des relations qui existent entre les fonctions que l'on intégre. Il reste enfin à prouver que la multi-suite $\Theta = (\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ est de type positif. Soit $X = \sum_{\alpha,\beta,\delta} z^{\beta}\overline{z}^{\alpha}(1+|z|^2)^{-\delta} \otimes S^a f$, (où $a = a(\alpha,\beta,\delta)$) alors nous avons :

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{\Theta}(X,X) &= \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta',\delta,\delta'} \Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(S^a f, S^{a'} f) \\
&= \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta',\delta,\delta'} \int_{\mathbb{C}^m} z^{\beta+\alpha'+a}\overline{z}^{\alpha+\beta'+a'}(1+|z|^2)^{-(\delta+\delta')} d\mu(z,\overline{z}) \qquad (3.3.58) \\
&= \int_{\mathbb{C}^m} |\sum_{\alpha,\beta,\delta} \frac{z^{\beta+a}\overline{z}^{\alpha}}{(1+|z|^2)^{\delta}}|^2 d\mu(z,\overline{z}) \geq 0.
\end{aligned}
$$

En conclusion, le multi-opérateur $S|_{\mathcal{D}}$ est sous-normal. ■

Ce dernier résultat traite des multi-opérateurs admettant un vecteur cyclique. On remarque que dans notre caractérisation de sous-normalité interviennent tous les produits scalaires $\langle S^{\alpha} f, S^{\beta} f\rangle$. Dans des cas particuliers, les shifts à poids, on verra dans la section qui suit que l'on demande uniquement des conditions sur les $\langle S^{\alpha} f, S^{\alpha} f\rangle$.

Partie III.4 Sous-normalité et multi-shifts à poids

L'étude des shifts à poids nous permet, entre autres choses, de donner des exemples et contre-exemples à certains problèmes. Pour n'en citer qu'un, on peut noter qu'il existe des shifts à poids S hyponormaux tels que $p(S)$ ne soit pas hyponormal où p est un polynôme (voir [Fa]).Ceci donne un intérêt à l'étude de ces opérateurs.

Dans cette partie, nous mettrons à profit les critères de sous-normalité jointe que nous avons prouvés dans la section précédente. Nous utiliserons essentiellement le théorème 3.3.2. Pour ce faire nous nous occuperons uniquement de multi-shifts (unilatéraux comme bilatéraux) à poids commutatifs et non bornés. Des caractérisations pour un shift à poids borné sont données par J. Stampfli et C. Berger (voir [Sta], [Hal3] et [Lam]). C'est ensuite A. Lubin qui généralise la caractérisation au cas de mulit-shifts à poids continus en 1977 dans [Lub]. En 1989, J. Stochel et F.H. Szafraniec donnent le pendant du résultat de C. Berger dans le cas d'un multi-shift non borné. Dans ce qui suit nous montrerons que la caractérisation est en fait valable pour un multi-shift à poids non nécessairement borné. Pour ce faire on utilisera une méthode complétement différente de celles utilisées pour démontrer les résultats cités, basée sur le théorème 3.3.2.

Dans un second temps, on caractérisera les multi-shifts à poids non bornés bilatéraux qui admettent une extension normale. En particulier, on prouvera des résultats qui généralisent le cas d'un seul multi-shift.

Enfin, nous généraliserons les méthodes de [St-Sz4] afin de donner un moyen de construire un grand nombre d'exemples de multi-opérateurs sous-normaux. En particulier, nous montrerons par une nouvelle méthode que le *multi-opérateur de création*, qui est souvent utilisé en Physique (voir par exemples [St-Sz2], [St-Sz4], [Ot], etc.), est sous-normal.

Dans cette partie III-4, les méthodes sont souvent longues et demandent des calculs quelquefois fastidieux mais la majeure partie des résultats peut s'énoncer de manière simple et concise.

On rappelle qu'un opérateur S est appelé *shift à poids unilatéral* sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ (non nécessairement borné) si, pour une base orthonormale $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$, on a :

$$S(\xi_n) = \lambda_n \xi_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Alors, on définit le domaine $\mathcal{D}(S)$ de S comme étant l'espace vectoriel engendré par le vecteur cyclique ξ_0.

3.4.1 Définition : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable avec une base orthonormale $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\geq 0}$. On dit que le multi-opérateur $S = (S_1, \cdots, S_m)$ est un *multi-shift à poids unilatéral* si :

$$S_j(\xi_{i_1,\cdots,i_m}) = \lambda^{(j)}_{i_1,\cdots,i_m} \xi_{i_1,\cdots,i_j+1,\cdots,i_m}, \tag{3.4.1}$$

où $\lambda^{(j)}_{i_1,\cdots,i_m}$ sont des nombres complexes non nuls pour tout $i_1 \geq 0, \cdots, i_m \geq 0$ et $j = 1, \cdots, m$. En particulier, chaque opérateur est défini sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m \geq 0}$.

De plus, le multi-opérateur $S = (S_1, \cdots, S_m)$ est commutatif si et seulement si on a pour chaque $(i_1, \cdots, i_m)$ et pour chaque couple (j,k) :

$$\lambda^{(j)}_{i_1,\cdots,i_m}\lambda^{(k)}_{i_1,\cdots,i_j+1,\cdots,i_m} = \lambda^{(k)}_{i_1,\cdots,i_m}\lambda^{(j)}_{i_1,\cdots,i_k+1,\cdots,i_m}. \tag{3.4.2}$$

Dans ce cas, on peut définir sans ambiguïté les puissances successives de S.

3.4.2 Notations : Enfin, comme dans le deuxième chapitre, on notera par $(1+t^2)^\beta$ l'expression $(1+t_1^2)^{\beta_1}\cdots(1+t_m^2)^{\beta_m}$ où β est un multi-indice positif $(\beta_1, \cdots, \beta_m)$. De manière similaire, on notera par $(1+t)^\beta$ l'expression $(1+t_1)^{\beta_1}\cdots(1+t_m)^{\beta_m}$.

3.4.3 Théorème : *Soit $\mathcal{H}$ un espace de* HILBERT *séparable avec une base orthonormale $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\geq 0}$, et soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-shift à poids commutatif non nécessairement borné défini sur le domaine commun $Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\geq 0}$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) S est un multi-opérateur sous-normal.

(ii) $||S^P\xi_0||^2 = \int_{\mathbb{R}^m_+} t^P d\mu(t)$, $\forall P \geq 0$ où μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^m_+$.

Démonstration.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On veut appliquer le théorème 3.3.2. Pour ce faire, on définit les formes sesquilinéaires $(\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$, pour chaque multi-indice positif α, β, δ, I, et J, en posant :

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^I\xi_0, S^J\xi_0) = \quad Kr(I+\beta, J+\alpha)\int_{\mathbb{R}^m_+}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta}}{(1+t^2)^\delta}d\rho(t_1,\cdots,t_m), \tag{3.4.3}$$

où ρ est la mesure positive sur $\mathbb{R}^m_+$ vérifiant les égalités suivantes pour tout multi-indice positif M :

$$\int_{\mathbb{R}^m_+} t^M d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^m_+} v^{2M} d\rho(v). \tag{3.4.4}$$

On notera par $(e_1, \cdots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{C}^m$. Enfin, on étend par linéarité ces formes sesquilinéaires $(\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ à l'espace vectoriel $\mathcal{D}(S)$ qui est en fait $Vect(\xi_P)_{P\geq 0}$ $= Vect(S^P\xi_0)_{P\geq 0}$ complet (P est un multi-indice). On peut alors vérifier facilement que l'on a la propriété (ii) de (3.3.1) :

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^I\xi_0, S^J\xi_0) = \Theta^-_{\beta,\alpha,\delta}(S^J\xi_0, S^I\xi_0).$$

Maintenant, on va commencer par montrer que ces formes sesquilinéaires sont bien définies et vérifient les propriétés (1) jusqu'à (5) du théorème 3.3.2.

Ces formes sont bien définies puisque les vecteurs $(S^P\xi_0)_{P\geq 0}$ sont linéairement indépendants. Egalement, grâce à la linéarité des formes, il nous suffit de vérifier les conditions (1), (2), (4) et la première partie de la (3) sur ces vecteurs de base $(S^P\xi_0)_{P\geq 0}$. Pour la propriété (1), on prend I et J deux multi-indices positifs et on montre :

$$\begin{aligned}\Theta_{0,0,0}(S^I\xi_0, S^J\xi_0) &= Kr(I,J)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+J}d\rho(t) = Kr(I,J)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^I d\mu(t)\\ &= Kr(I,J)\quad ||S^I\xi_0||^2 = \langle S^I\xi_0, S^J\xi_0\rangle.\end{aligned}$$

En ce qui concerne la condition (2), pour chaque k dans $\{1,\cdots,m\}$, un calcul simple nous donne :

$$\begin{aligned}\Theta_{0,e_k,0}(S^I\xi_0, S^J\xi_0) &= Kr(I+e_k,J)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+e_k+J}d\rho(t) = Kr(I+e_k,J)\quad ||S^{I+e_k}\xi_0||^2\\ &= \langle S^{I+e_k}\xi_0, S^J\xi_0\rangle = \langle S^I S_k\xi_0, S^J\xi_0\rangle.\end{aligned}$$

Pour la propriété (3), on commence par obtenir :

$$\Theta_{e_k,0,0}(S_kS^I\xi_0, S^I\xi_0) = Kr(I+e_k,I+e_k)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+2e_k+I}d\rho(t) = \Theta_{e_k,e_k,0}(S^I\xi_0, S^I\xi_0).$$

De plus, si on écrit $x = \sum_{I\geq 0}\zeta_I S^I\xi_0$, on a l'expression :

$$\begin{aligned}\Theta_{e_k,e_k,0}(x,x) &= \sum_{I,J}\zeta_I\,\overline{\zeta_J}\,\Theta_{e_k,e_k,0}(S^I\xi_0, S^J\xi_0)\\ &= \sum_{I,J}\zeta_I\,\overline{\zeta_J}\,Kr(I+e_k,J+e_k)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+2e_k+J}d\rho(t)\\ &= \sum_{I,J}\zeta_I\,\overline{\zeta_J}\,Kr(I,J)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+e_k}d\mu(t) = \sum_I |\zeta_I|^2\,||S^{I+e_k}\xi_0||^2\\ &= ||\textstyle\sum_I \zeta_I\, S^{I+e_k}\xi_0||^2 = ||S_kx||^2,\end{aligned}$$

puisque la famille $(S^I\xi_0)_I$ est une famille orthogonale. On montre maintenant la relation (4), on démarre de l'expression $\Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_k}(S^I\xi_0, S^J\xi_0) + \Theta_{\alpha+e_k,\beta+e_k,\delta+e_k}(S^I\xi_0, S^J\xi_0)$ qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} &= Kr(I+\beta,J+\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta}}{(1+t^2)^{\delta+e_k}}d\rho(t)\\ &\quad +Kr(I+\beta+e_k,J+\alpha+e_k)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta+2e_k}}{(1+t^2)^{\delta+e_k}}d\rho(t)\\ &= Kr(I+\beta,J+\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta}(1+t_k^2)}{(1+t^2)^{\delta+e_k}}d\rho(t)\\ &= Kr(I+\beta,J+\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta}}{(1+t^2)^{\delta}}d\rho(t) = \Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^I\xi_0, S^J\xi_0).\end{aligned}$$

Par conséquent, sur l'ensemble $Vect(S^P\xi_0)_{P\geq 0}$, on obtient l'égalité suivante :

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta} = \Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_k} + \Theta_{\alpha+e_k,\beta+e_k,\delta+e_k}.$$

Pour la dernière condition (5), on prend une famille $(x_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ finie, de vecteurs, incluse dans l'espace vectoriel $Vect(S^P\xi_0)_{P\geq 0}$. On peut évidemment écrire chacun de ces vecteurs $x_{\alpha,\beta,\delta}$ sous la forme $\sum_J \zeta_{\alpha,\beta,\delta,J}S^J\xi_0$. Avec ces notations, l'expression : $\displaystyle\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'} \Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(x_{\alpha,\beta,\delta}, x_{\alpha',\beta',\delta'})$ peut s'écrire :

$$\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta',J,K} \zeta_{\alpha,\beta,\delta,J}\,\overline{\zeta_{\alpha',\beta',\delta',K}}\,\Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(S^J\xi_0, S^K\xi_0)$$

$$= \sum \zeta_{\alpha,\beta,\delta,J}\,\overline{\zeta_{\alpha',\beta',\delta',K}}\,Kr(J+\beta+\alpha', K+\alpha+\beta')\int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{J+K+\alpha+\beta+\alpha'+\beta'}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}}d\rho(t)$$

$$= \sum \zeta_{\alpha,\beta,\delta,J}\,\overline{\zeta_{\alpha',\beta',\delta',K}}\,Kr(J+\beta-\alpha, K-\alpha'+\beta')\int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{J+K+\alpha+\beta+\alpha'+\beta'}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}}d\rho(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^m}\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta',J,K} \zeta_{\alpha,\beta,\delta,J}\,\overline{\zeta_{\alpha',\beta',\delta',K}}\int_{\mathbb{T}^m} u^{J+\beta-\alpha}\overline{u^{K+\beta'-\alpha'}}d\sigma(u)\frac{t^{J+K+\alpha+\beta+\alpha'+\beta'}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}}d\rho(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^m}\int_{\mathbb{T}^m}|\sum_{\alpha,\beta,\delta,J}\zeta_{\alpha,\beta,\delta,J}\frac{t^{J+\alpha+\beta}}{(1+t^2)^{\delta}}u^{J+\beta-\alpha}|^2 d\rho(t)d\sigma(u) \geq 0,$$

où σ est la mesure normalisée de LEBESGUE définie sur le Tore $\mathbb{T}^m$ (voir la repésentation intégrale (3.3.33) utilisée dans l'exemple 3.3.13). Enfin, on conclut en appliquant le théorème 3.3.2.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si S est multi-opérateur sous-normal et si N est une extension normale de S, on obtient pour tout multi-indice positif P :

$$\begin{aligned}\langle S^P\xi_0, S^P\xi_0\rangle &= \langle N^P\xi_0, N^P\xi_0\rangle = \langle N_m^{*p_m}\cdots N_1^{*p_1}N_1^{p_1}\cdots N_m^{p_m}\xi_0,\xi_0\rangle \\ &= \int_{\mathbb{C}^m}|z_1|^{2p_1}\cdots|z_m|^{2p_m}d\langle E(z_1,\cdots,z_m)\xi_0,\xi_0\rangle,\end{aligned}$$

où E est la mesure spectrale associée au multi-opérateur normal N. Et donc, si l'on pose :

$$\mu(\tau) = \langle E(\phi^{-1}(\tau))\xi_0,\xi_0\rangle,$$

pour chaque ensemble borélien τ de $\mathbb{R}_+^m$, où ϕ est défini par :

$$\phi : \mathbb{C}^m \ni (z_1,\cdots,z_m) \to (|z_1|^2,\cdots,|z_m|^2) \in \mathbb{R}_+^m,$$

on obtient que $||S^P\xi_0||^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu(t)$ pour chaque multi-indice $P\geq 0$ où μ est une mesure positive. ∎

3.4.4 Remarques :

(1) On peut remarquer qu'il existe des nombres complexes non nuls $(\chi_P)_{P\geq 0}$ tels que :

$$S^P\xi_0 = S_1^{p_1}\cdots S_m^{p_m}\xi_0 = \chi_{p_1,\cdots,p_m}\xi_{p_1,\cdots,p_m},$$

où les $\chi_{p_1,\cdots,p_m}$ sont donnés par :

$$\begin{cases} 1 \text{ si } P = 0 \\ \\ \displaystyle\prod_{i_1=0}^{p_1-1}\lambda^{(1)}_{i_1,p_2-1,..,p_m-1}\cdots\prod_{i_m=0}^{p_m-1}\lambda^{(m)}_{0,\cdots,0,i_m} \text{ si } P\geq(1,\cdots,1) \\ \\ \displaystyle\prod_{i_{c_1}=0}^{p_{c_1}-1}\lambda^{(c_1)}_{0,..,i_{c_1},0,..,p_{c_k}-1,..,0}\cdots\prod_{i_{c_k}=0}^{p_{c_k}-1}\lambda^{(c_k)}_{0,..,0,i_{c_k},..,0} \text{ if } P=(0,..,p_{c_1},0,..,p_{c_k},..,0), \quad p_{c_j}>0. \end{cases}$$

Par conséquent, la condition (ii) de l'hypothèse précédente est équivalente au fait que la multi-suite

$$(|\chi_{p_1,\cdots,p_m}|^2)_{p_1,\cdots,p_m\geq 0}, \tag{3.4.5}$$

soit une multi-suite de moments de STIELTJES.

(2) Soient $\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_m$ des espaces de HILBERT séparables et soit $\mathcal{H}$ le produit tensoriel (algébrique) $\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_m$, qui n'est pas nécessairement un espace de HILBERT. Soit $\mathcal{K}$ la complétion de $\mathcal{H}$ (dans ce cas $\mathcal{H}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{K}$). Soit aussi $(\xi_{i_1,\cdots,i_m} = \xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_m})$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$, où les (ξ_{i_j}) sont les bases orthonormales des $\mathcal{H}_j$ respectivement pour chaque j dans $\{1,\cdots,n\}$. On notera par S_j le shift à poids unilatéral défini sur $\mathcal{H}_j$. On peut identifier l'opérateur S_j sur $\mathcal{H}_j$ avec l'opérateur $I\otimes\cdots\otimes I\otimes S_j\otimes I\otimes\cdots\otimes I$ défini sur $\mathcal{H}$. Alors, $S=(S_1,\cdots,S_m)$ est un multi-opérateur sur $Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\geq 0}$ qui est l'espace linéaire engendré par la base $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\geq 0}$. Donc on peut appliquer le théorème précédent à ce type d'espaces.

(3) Pour des multi-opérateurs, on peut montrer que la condition (ii) du théorème précédent implique les conditions « à la ITÔ » où « à la LUBIN » (voir [It] et [Lub3], respectivement). Mais ces dernières conditions ne sont pas équivalentes parce qu'il existe des formes linéaires semi-définies positives sur $\mathbb{R}[t_1,\cdots,t_n]$ qui ne sont pas des suites de moments (voir des exemples dans [BCJ], [Fr], [Sch] etc).

Comme conséquence du théorème 3.4.3, on obtient le corollaire suivant qui est un résultat obtenu par J. STOCHEL et F.H. SZAFRANIEC (voir [St-Sz2], théorème 4).

3.4.5 Corollaire : *Soit S un shift à poids unilatéral (non nécessairement borné) défini dans un espace de* HILBERT *séparable $\mathcal{H}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) S is subnormal.

(ii) $\displaystyle\sum_{j,k=0}^{n}\langle S^k f_j, S^j f_k\rangle \geq 0,\ \forall f_0,\cdots,f_n\in Vect(\xi_n)_{n\geq 0}.$

(iii) $\sum_{j,k=0}^{n} \langle S^{j+k} f_j, S^{j+k} f_k \rangle \geq 0, \forall f_0, \cdots, f_n \in Vect(\xi_n)_{n\geq 0}$.

(iv) $||S^n \xi_0||^2 = \int_0^{+\infty} t^n d\mu(t), \forall n \geq 0$ *où* μ *est une mesure positive avec des moments à tout ordre.*

Le théorème 3.4.3 nous donne l'équivalence $(i) \iff (iv)$ (dont la preuve est différente de celle donnée dans [St-Sz2]). Les autres équivalences sont des démonstrations classiques (sur le problème de Stieltjes unidimensionel) que l'on peut, par exemple, trouver dans l'article [St-Sz2].

Maintenant que nous nous sommes occupé des multi-shifts à poids unilatéraux commutatifs (non nécessairement bornés), notre but est de donner des résultats similaires pour les multi-shifts à poids bilatéraux (toujours commutatifs et non nécessairement bornés). Ici se poseront des problèmes de définition pour nos formes linéaires, on aura donc besoin d'introduire des nouvelles conditions et définitions.

Soit S un shift à poids bilatéral et soit $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Cela signifie qu'il existe une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que l'on ait :

$$S(\xi_n) = x_n \xi_{n+1}.$$

Si tous les x_n sont non nuls, alors $(S^n \xi_0)_{n\in\mathbb{Z}}$ engendre l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Et, si on pose $\mathcal{D}(S) = Vect(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on obtient $\cap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}(S^n) = \mathcal{D}(S)$, qui est un sous-espace dense dans $\mathcal{H}$. Comme dans le début de cette partie, on peut définir des multi-shifts à poids bilatéraux :

Supposons que $\mathcal{H}$ soit un espace de Hilbert séparable munie d'une base orthonormée $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\in\mathbb{Z}}$, on dit que $S = (S_1, \cdots, S_m)$ est un multi-shift à poids bilatéral si pour chaque multi-indice $(i_1, \cdots, i_m) \in \mathbb{Z}^m$ et pour chaque $j \in \{1, \cdots, m\}$ on a :

$$S_j(\xi_{i_1,\cdots,i_m}) = \lambda^{(j)}_{i_1,\cdots,i_m} \xi_{i_1,\cdots,i_j+1,\cdots,i_m}, \tag{3.4.6}$$

où les $\lambda^{(j)}_{i_1,\cdots,i_m}$ sont des nombres complexes non nuls pour tout multi-indice $i_1, \cdots, i_m$ et tout $j = 1, \cdots, m$. En particulier, le multi-opérateur est commutatif si on a des égalités similaires au début de la section (voir (3.4.2)). Dans ce cas, le multi-opérateur S est défini sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la forme $(S^\alpha \xi_0)_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}$.

3.4.6 Définitions : Soient $(r_{1,k})_{k\geq 0}, \cdots, (r_{m,k})_{k\geq 0}$ des suites d'entiers. On dira que ces suites satisfont à la condition $(*)$ s'il existe une fonction strictement croissante φ, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, qui vérifie la condition :

$$\lim_{k\to\infty} r_{j,\varphi(k)} = +\infty, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{$*$}$$

Cette condition $(*)$ peut être vue comme une sorte de $\sup r_k = +\infty$ quand on est dans le cas de plusieurs suites.

Si $K = (k_1, \cdots, k_m)$ et $L = (l_1, \cdots, l_m)$ sont deux multi-indices positifs, et si $(r_{1,k})_{k\geq 0}, \cdots, (r_{m,k})_{k\geq 0}$ sont des suites d'entiers, on pose par R_K le m-uplet $(r_{1,k_1}, \cdots, r_{m,k_m})$ et :

$$max(K, L) = (max(k_1; l_1), \cdots, max(k_m; l_m)).$$

De plus, on écrira par $A_R(K, L)$ le multi-indice positif $(a_1, \cdots, a_m)$ défini par :

$$a_j \begin{cases} = k_j \text{ si } r_{j,k_j} \geq r_{j,l_j} \\ = l_j \text{ si non }. \end{cases}$$

(en particulier, on a $A_R(K, K) = K$). Enfin, si S est un muti-shift bilatéral commutatif, on notera par f_K l'élément suivant :

$$f_K = S^{-2r_{1,k_1}e_1 \cdots -2r_{m,k_m}e_m}\xi_0 = S^{-2R_K}\xi_0. \tag{3.4.7}$$

3.4.7 Définition : Soit $(\mu_{k_1,\cdots,k_m})_{k_1,\cdots,k_m\geq 0}$ une multi-suite de mesures positives à supports dans $\mathbb{R}_+^m$. On dira que cette multi-suite vérifie la condition $(**)$ *en respectant la multi-suite* $(r_{1,k}, \cdots, r_{m,k})_{k\geq 0}$ d'entiers si on a l'égalité suivante pour tout multi-indice positif β :

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{P+2R_{K'}-2R_K}}{(1+t)^\beta} d\mu_{K'}(t) = \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^P}{(1+t)^\beta} d\mu_K(t), \tag{$**$}$$

quand P et $P + 2R_{K'} - 2R_K$ sont tous les deux positifs.

3.4.8 Lemme : *Soit $\mathcal{H}$ un espace de* HILBERT *séparable et soit $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. On suppose que $(r_{1,k})_{k\geq 0}, \cdots, (r_{m,k})_{k\geq 0}$ est une multi-suite d'entiers vérifiant la condition $(*)$. On suppose également qu'il existe une multi-suite de mesures positives $(\mu_{k_1,\cdots,k_m})_{k_1,\cdots,k_m\geq 0}$ à supports dans $\mathbb{R}_+^m$ vérifiant la condition $(**)$ en respectant la multi-suite $(r_{1,k}, \cdots, r_{m,k})_{k\geq 0}$. Alors, on peut définir sans ambiguité les formes sesquilinéaires $(\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ sur $Vect(S^I f_K)_{I,K\geq 0} = Vect(S^I\xi_0)_{I\in\mathbb{Z}^m}$, où on a posé $f_K = S^{-2r_{1,k_1}e_1\cdots -2r_{m,k_m}e_m}\xi_0$ (et où S est un multi-shift à poids bilatéral commutatif non nécessairement borné), par les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^I f_K, S^J f_L) &= Kr(I + \beta - 2R_K, J + \alpha - 2R_L) \\ &\times \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{I+J+\alpha+\beta-2R_K-2R_L+4max(R_K,R_L)}}{(1+t^2)^\delta} d\rho_{A_R(K,L)}(t). \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Démonstration.

On rappelle que, jusqu'à la fin, on note par $(e_1, \cdots, e_m)$ la base canonique de l'espace hermitien $\mathbb{C}^m$.

On suppose qu'il existe d'autres representations pour les deux vecteurs $S^I f_K$ et $S^J f_L$. On les note alors $S^{I'} f_{K'}$ et $S^{J'} f_{L'}$. Alors, on a évidemment :

$$\begin{cases} S^I S^{-2r_{1,k_1}e_1\cdots -2r_{m,k_m}e_m}\xi_0 = S^{I'} S^{-2r_{1,k'_1}e_1\cdots -2r_{m,k'_m}e_m}\xi_0. \\ \\ S^J S^{-2r_{1,l_1}e_1\cdots -2r_{m,l_m}e_m}\xi_0 = S^{J'} S^{-2r_{1,l'_1}e_1\cdots -2r_{m,l'_m}e_m}\xi_0. \end{cases} \tag{3.4.9}$$

Comme le multi-opérateur S transforme chaque élément de la base orthonormale en un multiple (non nul) d'un autre élément de cette base, la condition (3.4.9) implique les deux égalités suivantes :

$$(3.4.10)\qquad \begin{cases} i_p - 2r_{p,k_p} = i'_p - 2r_{p,k'_p} \text{ pour tout } p \in \{1, \cdots, m\}. \\ \\ j_p - 2r_{p,l_p} = j'_p - 2r_{p,l'_p} \text{ pour tout } p \in \{1, \cdots, m\}. \end{cases}$$

Alors, on en déduit :

$$Kr(I + \beta - 2R_K, J + \alpha - 2R_L) = Kr(I' + \beta - 2R_{K'}, J' + \alpha - 2R_{L'}).$$

Maintenant, en utilisant la formule (3.4.8), on a $\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^I f_K, S^J f_L)$ qui est égal à :

$$Kr(I + \beta - 2R_K, J + \alpha - 2R_L) \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{2I+2\beta-4R_K+4max(R_K,R_L)}}{(1+t^2)^\delta} d\rho_{A_R(K,L)}(t)$$

$$= \ Kr(I + \beta - 2R_K, J + \alpha - 2R_L) \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{I+\beta-2R_K+2max(R_K,R_L)}}{(1+t)^\delta} d\mu_{A_R(K,L)}(t)$$

De plus, en appliquant (3.4.10), l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$Kr(I' + \beta - 2R_{K'}, J' + \alpha - 2R_{L'}) \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{I'+\beta-2R_{K'}+2max(R_K,R_L)}}{(1+t)^\delta} d\mu_{A_R(K,L)}(t).$$

En appliquant la condition $(**)$ à $\mu_{A_R(K,L)}$ et $\mu_{A_R(K',L')}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{I'+\beta-2R_{K'}+2max(R_{K'},R_{L'})} t^{2(max(R_K,R_L)-max(R_{K'},R_{L'}))}}{(1+t)^\delta} d\mu_{A_R(K,L)}(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{I'+\beta-2R_{K'}+2max(R_{K'},R_{L'})}}{(1+t)^\delta} d\mu_{A_R(K',L')}(t),$$

puisque $I'+\beta-2R_{K'}+2max(R_{K'}, R_{L'})$ et $I'+\beta-2R_{K'}+2max(R_{K'}, R_{L'})+2(max(R_K, R_L)-max(R_{K'}, R_{L'})) = I + \beta - 2R_K + 2max(R_K, R_L)$ sont positifs ou nuls en même temps (voir (3.4.10)). Ceci implique que $\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^I f_K, S^J f_L)$ est égal à :

$$Kr(I' + \beta - 2R_{K'}, J' + \alpha - 2R_{L'}) \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{I'+\beta-2R_{K'}+2max(R_{K'},R_{L'})}}{(1+t)^\delta} d\mu_{A_R(K',L')}(t)$$

$$= Kr(I'+\beta-2R_{K'}, J'+\alpha-2R_{L'}) \times \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{I'+J'+\beta+\alpha-2R_{K'}-2R_{L'}+4max(R_{K'},R_{L'})}}{(1+t^2)^\delta} d\rho_{A_R(K',L')}(t)$$

$= \Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^{I'} f_{K'}, S^{J'} f_{L'})$.

Par conséquent les formes sesquilinéaires $(\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ sont bien définies pour tout triplet de multi-indices positifs α, β et δ. ■

3.4.9 Théorème : *Soit $\mathcal{H}$ un espace de* HILBERT *séparable et soit $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. On note par $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-shift à poids* *bilatéral commutatif non nécessairement borné défini sur* $Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\in\mathbb{Z}}$. *Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *S est un multi-opérateur sous-normal.*

(ii) *Pour chaque famille de suites* $(r_{1,k})_{k\geq 0},\cdots,(r_{m,k})_{k\geq 0}$, *à valeurs entières vérifiant la condition* $(*)$, *on a :*

$$||S^{-2r_{1,k_1}e_1\cdots-2r_{m,k_m}e_m+P}\xi_0||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_{k_1,\cdots,k_m}(t),\ \forall P\geq 0$$

où les $(\mu_K = \mu_{k_1,\cdots,k_m})_{K\geq 0}$ *sont des mesures positives avec des moments à tous les ordres qui vérifient la condition* $(**)$ *en respectant* $(r_{1,k_1},\cdots,r_{m,k_m})_{k_1,\cdots,k_m\geq 0}$.

(iii) *Il existe une famille de suites* $(r_{1,k})_{k\geq 0},\cdots,(r_{m,k})_{k\geq 0}$, *à valeurs entières vérifiant la condition* $(*)$, *telle que l'on ait :*

$$||S^{-2r_{1,k_1}e_1\cdots-2r_{m,k_m}e_m+P}\xi_0||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_{k_1,\cdots,k_m}(t),\ \forall P\geq 0,$$

où les $(\mu_K)_{K\geq 0}$ *sont des mesures positives avec des moments à tous les ordres qui vérifient la condition* $(**)$ *en respectant* $(r_{1,k_1},\cdots,r_{m,k_m})_{k_1,\cdots,k_m\geq 0}$.

Démonstration.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ évident.

$(iii)\Rightarrow(i)$ Soit (f_K) la famille définie à la définition 3.4.6 (voir (3.4.7)). On commence par calculer le produit scalaire $\langle S^I f_K, S^J f_L\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle S^I f_K, S^J f_L\rangle &= \langle S^{I-2R_K}\xi_0, S^{J-2R_L}\xi_0\rangle\\ &= \langle S^{I-2R_K+2max(R_K,R_L)}S^{-2max(R_K,R_L)}\xi_0,\\ &\qquad\qquad S^{J-2R_L+2max(R_K,R_L)}S^{-2max(R_K,R_L)}\xi_0\rangle\\ &= Kr(I-2R_K, J-2R_L)\quad ||S^{I-2R_K+2max(R_K,R_L)}f_{A_R(K,L)}||^2.\end{aligned}$$

Alors, si l'hypothèse (iii) est vérifiée (sur les suites de moments de STIELTJES multidimensionels), le produit scalaire précédent $\langle S^I f_K, S^J f_L\rangle$ peut se mettre sous la forme :

$$Kr(I-2R_K, J-2R_L)\quad \int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+J-2R_k-2R_L+4max(R_K,R_L)}d\rho_{A_R(K,L)}(t). \tag{3.4.11}$$

(Pour ce qui concerne la relation entre ρ et μ, on utilise le même lien que pour les multi-shifts unilatéraux, voir l'égalité (3.4.4)).

On a défini (voir (3.4.8)), pour chaque triplet de multi-indices positifs (α,β,δ) et pour chaque I, J, K, et L, $\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^I f_K, S^J f_L)$ en posant :

$$Kr(I+\beta-2R_K, J+\alpha-2R_L)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta-2R_K-2R_L+4max(R_K,R_L)}}{(1+t^2)^\delta}d\rho_{A_R(K,L)}(t),$$

où $\rho_{A_R(K,L)}$ est la mesure positive à support dans $\mathbb{R}_+^m$ associée à $\mu_{A_R(K,L)}$ par (3.4.4). Par le lemme précédent 3.4.8, on sait que cette multi-suite de formes sesquilinéaires

$\Theta = (\Theta_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta\geq 0}$ est bien définie. On commence alors par vérifier les conditions (1) à (5) du théorème 3.3.2. (Quand c'est suffisant, on vérifie juste les propriétés sur la famille génératrice $(S^I f_K)_{I,K\geq 0}$. En effet, comme les suites d'entiers satisfont à la condition $(*)$, on obtient $Vect(\xi_P)_{P\in\mathbb{Z}^m} = Vect(S^I f_K)_{I,K\geq 0})$.

Pour la condition (1), on calcule $\Theta_{0,0,0}(S^I f_K, S^J f_L)$:

$$\begin{aligned}
& Kr(I-2R_K, J-2R_L)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+J-2R_K-2R_L+4max(R_K,R_L)} d\rho_{A_R(K,L)}(t) \\
= \;& Kr(I-2R_K, J-2R_L)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{2I-4R_K+4max(R_K,R_L)} d\rho_{A_R(K,L)}(t) \\
= \;& \langle S^I f_K, S^J f_L\rangle,
\end{aligned}$$

grâce à l'égalité (3.4.11).

Pour la seconde condition, on doit montrer $\Theta_{0,e_c,0}(S^I f_K, S^J f_L) = \langle S^I S_c f_K, S^J f_L\rangle$. On démarre de la partie gauche de l'égalité qui n'est autre que :

$$\begin{aligned}
& Kr(I-2R_K+e_c, J-2R_L)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+e_c+J-2R_K-2R_L+4max(R_K,R_L)} d\rho_{A_R(K,L)}(t) \\
= \;& Kr(I-2R_K+e_c, J-2R_L) \quad ||S^{I+e_c-2R_K+2max(R_K,R_L)} f_{A_R(K,L)}||^2 \\
= \;& \langle S^{I+e_c} f_K, S^J f_L\rangle = \langle S^I S_c f_K, S^J f_L\rangle.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la relation (3), on prend x dans $Vect(S^I f_K)_{I,K\geq 0}$. Grâce à la condition $(*)$, il existe un multi-indice positif B tel que l'on puisse écrire $x = \sum_{I\geq 0} \zeta_I \, S^I f_B$. Par conséquent, on a $\Theta_{e_c,e_c,0}(x,x)$ qui se met sous la forme : $\sum_{I,J} \zeta_I \, \overline{\zeta_J} \, \Theta_{e_c,e_c,0}(S^I f_B, S$

$$\begin{aligned}
= \;& \sum_{I,J} \zeta_I \, \overline{\zeta_J} \, Kr(I-2R_B+e_c, J-2R_B+e_c)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+2e_c+J} d\rho_B(t) \\
= \;& \sum_{I,J} \zeta_I \, \overline{\zeta_J} \, Kr(I-2R_B, J-2R_B)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+e_c} d\mu_B(t) \\
= \;& \sum_{I} |\zeta_I|^2 \int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+e_c} d\mu_B(t) = \sum_{I} |\zeta_I|^2 \, ||S^{I+e_c} f_B||^2 = ||S_c \sum_{I} \zeta_I \, S^I f_B||^2,
\end{aligned}$$

puisque la famille $(S^I f_B)_{I\geq 0}$ est une famille orthogonale. De plus, on a également la valeur $\Theta_{e_c,0,0}(S_c S^I f_K, S^I f_K)$:

$$\begin{aligned}
= \;& Kr(I-2R_B+e_c, J-2R_B+e_c)\int_{\mathbb{R}_+^m} t^{I+2e_c+I} d\rho_{A_R(K,K)}(t) \\
= \;& \Theta_{e_c,e_c,0}(S^I f_K, S^I f_K).
\end{aligned}$$

Pour la quatrième condition, on doit maintenant simplifier l'expression suivante $\Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_c}(S^I f_K, S^J f_L)$ $+\Theta_{\alpha+e_c,\beta+e_c,\delta+e_c}(S^I f_K, S^J f_L)$ qui est égale à :

$$Kr(I-2R_K+\beta, J-2R_L+\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta-2R_K-2R_L+4max(R_K,R_L)}}{(1+t^2)^{\delta+e_c}}d\rho_{A_R(K,L)}(t)$$

$$+Kr(I-2R_K+\beta+e_c, J-2R_L+\alpha+e_c)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta+2e_c-2R_K-2R_L+4max(R_K,R_L)}}{(1+t^2)^{\delta+e_c}}$$

$$d\rho_{A_R(K,L)}(t)$$

$$=Kr(I-2R_K+\beta, J-2R_L+\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta-2R_K-2R_L+4max(R_K,R_L)}}{(1+t^2)^{\delta+e_c}}$$

$$(1+t_c^2)d\rho_{A_R(K,L)}(t)$$

$$=Kr(I-2R_K+\beta, J-2R_L+\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta-2R_K-2R_L+4max(R_K,R_L)}}{(1+t^2)^{\delta}}d\rho_{A_R(K,L)}(t)$$

$$=\Theta_{\alpha,\beta,\delta}(S^If_K, S^Jf_L).$$

Par conséquent, sur l'espace vectoriel $Vect(S^If_K)_{I,K\geq 0}$, on a l'égalité suivante :

$$\Theta_{\alpha,\beta,\delta}=\Theta_{\alpha,\beta,\delta+e_c}+\Theta_{\alpha+e_c,\beta+e_c,\delta+e_c}.$$

Enfin, en ce qui concerne la condition de positivité (5), on doit montrer que la multi-suite de formes sesquilinéaires Θ est de type positive. Soit $x=(x_{\alpha,\beta,\delta})_{\alpha,\beta,\delta}$ une multi-suite finie de vecteurs de $Vect(S^If_K)_{I,K\geq 0}$. Grâce à la propriété $(*)$ sur les suites d'entiers que nous utilisons, on peut trouver un multi-indice B positif tel que l'on puisse écrire :

$$x_{\alpha,\beta,\delta}=\sum_{J\geq 0}\zeta_{\alpha,\beta,\delta,J}S^Jf_B.$$

Avec cette représentation, on obtient $\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta'}\Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(x_{\alpha,\beta,\delta},x_{\alpha',\beta',\delta'})$ qui est égal à :

$$\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta',I,J}\zeta_{\alpha,\beta,\delta,I}\,\overline{\zeta_{\alpha',\beta',\delta',J}}\,\Theta_{\alpha+\beta',\beta+\alpha',\delta+\delta'}(S^If_B,S^Jf_B)$$

$$=\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta',I,J}\zeta_{\alpha,\beta,\delta,I}\,\overline{\zeta_{\alpha',\beta',\delta',J}}\,Kr(I-2R_B+\beta+\alpha', J-2R_B+\alpha+\beta')$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta+\alpha'+\beta'-4R_B+4max(R_B,R_B)}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}}d\rho_B(t)$$

$$=\sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta',I,J}\zeta_{\alpha,\beta,\delta,I}\,\overline{\zeta_{\alpha',\beta',\delta',J}}\,Kr(I-2R_B+\beta-\alpha, J-2R_B-\alpha'+\beta')$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{t^{I+J+\alpha+\beta+\alpha'+\beta'}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}}d\rho_B(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^m} \sum_{\alpha,\beta,\delta,\alpha',\beta',\delta',I,J} \zeta_{\alpha,\beta,\delta,I} \overline{\zeta_{\alpha',\beta',\delta',J}} \int_{\mathbb{T}^m} u^{I+\beta-\alpha} \overline{u^{J+\beta'-\alpha'}} \frac{t^{I+J+\alpha+\beta+\alpha'+\beta'}}{(1+t^2)^{\delta+\delta'}} d\sigma(u) d\rho_B(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^m} \int_{\mathbb{T}^m} | \sum_{\alpha,\beta,\delta,I} \zeta_{\alpha,\beta,\delta,I} \frac{t^{I+\alpha+\beta}}{(1+^2)^\delta} u^{I+\beta-\alpha}|^2 d\rho(t) d\sigma(u),$$

où σ est la mesure de LEBESGUE normalisée définie sur le Tore $\mathbb{T}^m$ (voir (3.3.33)). Donc, on obtient :

$$\Lambda_\Theta(\sum_{\alpha,\beta,\delta} \bar{z}^\alpha z^\beta (1+|z|^2)^{-\delta} \otimes x_{\alpha,\beta,\delta} \, , \sum_{\alpha,\beta,\delta} \bar{z}^\alpha z^\beta (1+|z|^2)^{-\delta} \otimes x_{\alpha,\beta,\delta}) \geq 0.$$

En conclusion, on peut appliquer le théorème 3.3.2. Ceci entraîne que le multi-shift à poids bilatéral est sous-normal.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si S est un multi-opérateur sous-normal et si N est une extension normale (commutative) de S, on a :

$$\begin{aligned} \langle S^P f_K, S^P f_K \rangle \; &= \langle N^P f_K, N^P f_K \rangle = \langle N_m^{*p_m} \cdots N_1^{*p_1} N_1^{p_1} \cdots N_m^{p_m} f_K, f_K \rangle \\ &= \int_{\mathbb{C}^m} |z_1|^{2p_1} \cdots |z_m|^{2p_m} d\langle E(z_1, \cdots, z_m) f_K, f_K \rangle, \end{aligned}$$

où E est la mesure spectrale associée au multi-opérateur normal N. Et donc, si on pose :

$$\mu_K(\tau) = \langle E(\phi^{-1}(\tau)) f_K, f_K \rangle,$$

pour chaque ensemble τ de la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+^m$, où ϕ a été donnée dans le théorème 3.4.3 (voir $(i) \Rightarrow (ii)$). Comme conséquence, on obtient :

$$||S^P f_K||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_K(t),$$

pour chaque $P \geq 0$ où toutes les mesures $(\mu_K)_K$ sont des mesures positives. Enfin, on doit prouver que ces mesures satisfont à la condition $(**)$.

Pour chaque multi-indice positif β, on note par $(I+N^*N)^{-\beta}$ le multi-opérateur $((I+N_1^*N_1)^{-\beta_1}, \cdots, (I+N_m^*N_m)^{-\beta_m})$ qui est bien défini puisque chaque opérateur $N_j^*N_j$ est positif et que tous les opérateurs commutent. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \langle (I+N^*N)^{-\beta} S^P f_K, S^P f_K \rangle \; &= \langle N^P N^{*P} (I+N^*N)^{-\beta} f_K, f_K \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^P}{(1+t)^\beta} d\mu_K = \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{2P}}{(1+t^2)^\beta} d\rho_K. \end{aligned}$$

De plus, si $P + 2R_{K'} - 2R_K \geq 0$, on a (voir (3.4.7)) :

$$\begin{aligned} \langle (I+N^*N)^{-\beta} S^P f_K, S^P f_K \rangle \; &= \langle (I+N^*N)^{-\beta} S^{P+2R_{K'}-2R_K} f_{K'}, S^{P+2R_{K'}-2R_K} f_{K'} \rangle \\ &= \langle N^{*P+2R_{K'}-2R_K} (I+N^*N)^{-\beta} N^{P+2R_{K'}-2R_K} f_{K'}, f_{K'} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{P+2R_{K'}-2R_K}}{(1+t)^\beta} d\mu_{K'} = \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{P+2R_{K'}-2R_K}}{(1+t)^\beta} d\mu_K. \end{aligned}$$

Donc la condition $(**)$ est bien satisfaite pour cette famille de mesures. ■

On donne maintenant un corollaire qui est un cas particulier important du théorème 3.4.9 précédent. On prend juste comme multi-suite d'entiers qui vérifient la condition $(*)$ la multi-suite suivante (et sans doute la plus simple) :

$$(r_{1,k_1}, \cdots, r_{m,k_m} = K)_{K\geq 0}.$$

3.4.10 Corollaire : *Soit $\mathcal{H}$ un espace de* Hilbert *séparable et soit $(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Soit aussi S un multi-shift à poids bilatéral commutatif non nécessairement borné défini sur $Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m})$. Alors S est sous-normal si et seulement si il existe une multi-suite $(\mu_K)_{K\geq 0}$ de mesures positives à support dans $\mathbb{R}_+^m$ avec des moments à tous les ordres telles que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $||S^{-2K+P}\xi_0||^2 = \int_{\mathbb{R}_+^m} t^P d\mu_K(t), \forall P \geq 0.$

(ii) $\int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^{P+2(K'-K)}}{(1+t)^\beta} d\mu_{K'}(t) = \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{t^P}{(1+t)^\beta} d\mu_K(t)$, *pour chaque K et K' vérifiant $P+2(K'-K)\geq 0$ et $P\geq 0$.*

3.4.11 Remarques :

(1) Comme dans le cas des multi-shifts unilatéraux, on peut montrer que les conditions *(i)* à *(iii)* du théorème 3.4.9 impliquent les conditions de positivité à la Itô et Lubin.

(2) Toujours comme dans le cas des multi-shifts unilatéraux, on peut utiliser le théorème précédemment cité pour des produits tensoriels (algébriques) d'espaces de Hilbert séparables en utilisant la même identification.

(3) De plus, on peut remplacer les conditions *(ii)* et *(iii)* dans le théorème 3.4.9 par des conditions sur les différents poids $(\lambda^{(j)}_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m,j}$: savoir s'ils forment ou non des multi-suites de moments de Stieltjes.

Chaque multi-shift à poids bilatéral est inversible sur $Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\in\mathbb{Z}}$. De plus, on a $S_j(Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m}))$ qui est égal à $Vect(\xi_{i_1,\cdots,i_m})$. Donc, s'il existe un nombre positif tel que l'on ait :

$$|\lambda^{(j)}_{i_1,\cdots,i_m}| \geq \omega > 0, \tag{3.4.12}$$

chaque opérateur S_j admet un inverse borné. Quite à multiplier par un réel positif, l'hypothèse de l'exemple 3.3.8 est satisfaite. Par conséquent, la sous-normalité de S est équivalente à l'inégalité *(iii)* de la proposition de l'exemple 3.3.8.

Enfin, comme conséquence du théorème 3.4.9, on obtient un résultat de 1989 pour le cas d'un seul opérateur. On a juste à noter que la condition $(*)$ n'est autre que la notion de borne supérieure dans ce cas.

3.4.12 Corollaire : *Soit S un shift à poids bilatéral (non nécessairement borné). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) S est sous-normal.

(ii) $\sum_{j,k=0}^{n} \langle S^k f_j, S^j f_k \rangle \geq 0$, $\forall f_0, \cdots, f_n \in Vect(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(iii) $\sum_{j,k=0}^{n} \langle S^{j+k} f_j, S^{j+k} f_k \rangle \geq 0$, $\forall f_0, \cdots, f_n \in Vect(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(iv) Pour chaque suite à valeurs entières, $(r_k)_{k\geq 0}$ vérifiant, $\sup_k(r_k) = +\infty$, on a :

$$||S^{-2r_k+n}\xi_0||^2 = \int_0^{+\infty} t^n d\mu_k(t),\ \forall n \geq 0,$$

où les $(\mu_k)_{k\geq 0}$ sont des mesures positives ayant des moments à tous les ordres vérifiant $(**)$ en respectant la suite $(r_k)_{k\geq 0}$.

(v) Il existe une suite à valeurs entières, $(r_k)_{k\geq 0}$ vérifiant, $\sup_k(r_k) = +\infty$, on a :

$$||S^{-2r_k+n}\xi_0||^2 = \int_0^{+\infty} t^n d\mu_k(t),\ \forall n \geq 0,$$

où les $(\mu_k)_{k\geq 0}$ sont des mesures positives avec des moments de tout ordre vérifiant $(**)$ en respectant la suite $(r_k)_{k\geq 0}$.

Démonstration.
Les équivalences $(i) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$ proviennent du théorème 3.4.9 et les équivalences $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ sont données par le théorème 5 de [St-Sz2]. ■

3.4.13 Remarque : Si on choisit comme suite (r_k) vérifiant la condition $\sup(r_k) = +\infty$ la plus simple $(r_k = k)_{k\geq 0}$, on obtient comme conséquence du corollaire 3.4.12, un résultat similaire à celui de J. Stochel et F.H.Szafraniec (voir [St-Sz2], théorème 5, équivalence (i) à (iv)). La solution dans [St-Sz2], valable pour un opérateur, ne nécessite aucune condition du type $(**)$. On a imposé cette condition pour obtenir une assertion valide pour un nombre arbitraire d'opérateurs. La question de savoir si on peut supprimer cette condition $(**)$ en général, est ouverte.

A partir de maintenant et jusque la fin de cette section, nous allons nous employer à donner des résultats sur la sous-normalité de shifts à poids formés à partir de shifts unilatéraux sous-normaux et de leurs adjoints. Ceci nous permettra en particulier de donner un nombre considérable d'exemples d'opérateurs sous-normaux. On achèvera cette partie en reprenant l'exemple multi-dimensionnel d'un opérateur classique qui apparaît souvent en Physique : *L'opérateur de Création.* Pour des résultats sur cet opérateur dans le cas d'une seule variable, on peut se référer à [St-Sz], [St-Sz2], [St-Sz4] et [Ot].

3.4.14 Définition : Soit α un multi-indice strictement positif, T est dit un *α-multi-shift à poids* défini sur $\mathcal{D}(T) = Vect(\xi_I)_{I\geq 0} \subset \mathcal{H}$ (où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable et $(\xi_I)_{I\geq 0}$ une base orthonormée de cet espace) si on a :

$$T_j(\xi_I) = \lambda_I^{(j)} \xi_{I+\alpha_j},\quad \forall I \geq 0,\quad j = 1, \cdots, m. \tag{3.4.13}$$

En particulier un $(1,\cdots,1)$-multi-shift à poids est un multi-shift unilatéral classique. On dira qu'un α-multi-shift est commutatif si on a $T_iT_j = T_jT_i$ sur $\mathcal{D}(T) = Vect(\xi_I)_{I\geq 0}$ qui est un espace stable. Soit $\beta < \alpha$ ($\beta \in \mathbb{Z}_+^m$), on définit le multi-opérateur $T^{[\beta]} = (T_1^{[\beta_1]},\cdots,T_m^{[\beta_m]})$ par la formule ($j = 1,\cdots,m$) :

$$T_j^{[\beta_j]}(\xi_{\beta+(a_1,\cdots,a_m)\alpha}) = \lambda^{(j)}_{\beta+(a_1,\cdots,a_m)\alpha}\xi_{\beta+[(a_1,\cdots,a_m)+e_j]\alpha}, \tag{3.4.14}$$

sur l'espace de HILBERT séparable $\mathcal{H}_\beta$ qui est engendré par $Vect(\xi_{\beta+c\alpha})_{c_1,\cdots,c_m\geq 0}$. On rappelle que si l'on a deux multi-indices $A = (a_1,\cdots,a_m)$ et $B = (b_1,\cdots,b_m)$, on note par le produit AB le multi-indice $(a_1b_1,\cdots,a_mb_m)$. On peut remarquer que chaque multi-opérateur $T^{[\beta]}$ est un multi-shift à poids unilatéral sur l'espace de HILBERT $\mathcal{H}_\beta$. Alors tout α-multi-shift à poids est somme orthogonale des multi-shifts $T^{[\beta]}$, $0 \leq \beta < \alpha$. En fait, un α-multi-shift à poids permet de faire des sauts dans les indices de la base orthonormale de plus de 1.

Si $(\lambda^{(j)}_{i_1,i_2,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\geq 0; j=1,\cdots,m}$ est une multi-suite. Pour chaque couple de multi-indices positifs (α,β) fixé, on lui associe la multi-suite $(\lambda^{\beta,\alpha}_{p_1,p_2,\cdots,p_m})_{p_1,p_2,\cdots,p_m\geq 0}$ donnée par les produits suivants (voir la remarque 3.4.4 (1) pour une définition similaire) :
(3.4.15)

$$\begin{array}{cccc}
1 \text{ si} & p_1 = \cdots = p_m = 0 & & \\
|\lambda^{(m)}_{0,\cdots,0,\beta_m}|^2\times & |\lambda^{(m)}_{0,\cdots,0,\beta_m+\alpha_m}|^2\times & \cdots & \times|\lambda^{(m)}_{0,\cdots,0,\beta_m+(p_m-1)\alpha_m}|^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\times & \times & & \times \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
|\lambda^{(1)}_{\beta_1,(p_2-1)\alpha_2+\beta_2,..}|^2\times & |\lambda^{(1)}_{\alpha_1+\beta_1,(p_2-1)\alpha_2+\beta_2,\cdots}|^2\times & \cdots & \times|\lambda^{(1)}_{(p_1-1)\alpha_1+\beta_1,\cdots,(p_m-1)\alpha_m+\beta_m}|^2,
\end{array}$$

si chaque composante de P est non nulle. Et si P a des zéros dans sa décomposition, on ne fait apparaître que les termes où il n'y a pas de zéros comme ci-dessus (comme dans la remarque 3.4.4 (1)). En particulier, si la multi-suite $(\lambda^{(j)}_{i_1,i_2,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m\geq 0; j=1,\cdots,m}$ est la suite des poids d'un multi-shift commutatif unilatéral, la sous-normalité revient à savoir si $(\lambda^{0,\mathbf{1}}_{p_1,p_2,\cdots,p_m})_{p_1,p_2,\cdots,p_m\geq 0}$ est une suite de moments de STIELTJES (où $\mathbf{1}$ est le multi-indice $(1,\cdots,1)$).

3.4.15 Proposition : *Soit T un α-multi-shift commutatif à poids sur un espace de* HILBERT *$\mathcal{H}$ munie d'une base orthonormale $(\xi_I)_{I\geq 0}$. Soient $(\lambda^{(j)}_I)_{I\geq 0; j=1,\cdots,m}$ les poids de T. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est un α-multi-shift sous-normal.

(ii) $T^{[\beta]}$ est sous-normal pour tout β vérifiant $0 \leq \beta < \alpha$.

(iii) Pour tout β vérifiant $0 \leq \beta < \alpha$, $(\lambda^{\beta,\alpha}_I)_{I\geq 0}$ est une suite de moments de STIELTJES.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Pour tout β vérifiant $0 \leq \beta < \alpha$, on a $T^{[\beta]} = T|_{\mathcal{H}_\beta}$. Donc T est sous-normal implique que chaque $T^{[\beta]}$ l'est également.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Chaque $T^{[\beta]}$ est un multi-shift à poids sur l'espace de HILBERT $\mathcal{H}_\beta$. La commutativité des $T^{[\beta]}$ provient de celle de T. Il suffit d'utiliser le théorème 3.3.2 et la remarque 3.4.4 (1) du début de la section.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Comme $\mathcal{D}(T) = Vect(\xi_{i_1,i_2,\cdots,i_m})_{i_1,\cdots,i_m \geq 0}$, on a :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{0 \leq \beta < \alpha} \mathcal{H}_\beta, \text{ et } T = \bigoplus_{0 \leq \beta < \alpha} T^{[\beta]}. \tag{3.4.16}$$

Et on a également $\mathcal{D}(T) = \bigoplus_{0 \leq \beta < \alpha} \mathcal{D}(T^{[\beta]})$. Si $N^{[\beta]}$ sont les extensions normales des $T^{[\beta]}$, alors $N = \bigoplus_{0 \leq \beta < \alpha} N^{[\beta]}$ est une extension normale T. ■

3.4.16 Théorème : *Soit T un α-multi-shift à poids, commutatif et sous-normal, sur un espace de* HILBERT *séparable $\mathcal{H}$ munie d'une base orthonormale $(\xi_I)_{I \geq 0}$. Soit $(\delta_I^{(j)})_{I \geq 0; j=1,\cdots,m}$ une famille de nombres complexes. Si on note par $(\lambda_I^{(j)})_{I \geq 0; j=1,\cdots,m}$ les poids de T, soit W le multi-opérateur défini par :*

$$W_j \xi_I = \lambda_I^{(j)} \delta_I^{(j)} \xi_{I+e_j}; \quad j = 1, \cdots, m. \tag{3.4.17}$$

Alors W est sous-normal si $(\delta_I^{(j)})_{I \geq 0; j=1,\cdots,m}$ vérifie les conditions suivantes :

(i) $\delta_I^{(j)} \delta_{I+e_j}^{(k)} = \delta_I^{(k)} \delta_{I+e_k}^{(j)}$ pour tout $I \geq 0$ et pour tout $j, k = 1, \cdots, m$.

(ii) Il existe un multi-indice $A \geq 0$ tel que $\delta_I^{(j)} \neq 0$ pour $I \geq A$ et $\delta_I^{(j)} = 0$ si non.

(iii) $\delta_I^{A,\mathbf{1}}$ est une suite de moments de STIELTJES.

Démonstration.
Soit $\mathcal{K}$ l'espace de HILBERT séparable engendré par les vecteurs ξ_I qui vérifient $i_j < a_j$ pour au moins un indice $j \in \{1, \cdots, m\}$. Alors, on a $W_j = 0_{\mathcal{K}} \oplus W'_j$ où $W' = (W'_1, \cdots, W'_m)$ est un multi-shift à poids (commutatif grâce à l'hypothèse (i)) et ces derniers sont :

$$\delta_{I+A}^{(j)} \lambda_{I+A}^{(j)}, \quad I \geq 0 \text{ et } j = 1, \cdots, m.$$

le multi-opérateur W' est sous-normal si et seulement si $(\delta_I^{A,\mathbf{1}} \lambda_I^{A,\mathbf{1}})_{I \geq 0}$ est une suite de moments de STIELTJES. Comme T est sous-normal, $(\lambda_I^{0,\mathbf{1}})_{I \geq 0}$ est une suite de moments de STIELTJES. Il en est donc de même pour $(\lambda_I^{A,\mathbf{1}})_{I \geq 0}$. Par hypothèse, $(\delta_I^{A,\mathbf{1}})_{I \geq 0}$ en est une aussi. Donc, par une propriété du produit de SCHUR, $(\delta_I^{A,\mathbf{1}} \lambda_I^{A,\mathbf{1}})_{I \geq 0}$ est aussi une multi-suite de moments de STIELTJES, ce qui achève la démonstration. En effet, si $N = (N_1, \cdots, N_m)$ est une extension normale de W', les opérateurs $0_{\mathcal{K}} \oplus N_j$ sont normaux, commutent et prolongent W. ■

3.4.17 Définition : Soit R un multi-shift à poids, on dira que R vérifie la condition $(\diamond)$ si on a pour tout multi-indice positif I :

$$R_j(\xi_I) = r_{i_j}^{(j)} \xi_{I+e_j}, \quad I = (i_1, \cdots, i_m); \quad j = 1, \cdots, m. \tag{$\diamond$}$$

On peut noter que tout multi-shift à poids vérifiant $(\diamond)$ est forcément commutatif. En effet pour $k \neq j$, on a :

$$R_k R_j(\xi_I) = r_{i_j}^{(j)} R_k(\xi_{I+e_j}) = r_{i_j}^{(j)} r_{i_k}^{(k)} \xi_{I+e_j+e_k} = R_j R_k(\xi_I).$$

Afin de simplifier les formules des multi-opérateurs, on posera pour $T = (T_1, \cdots T_m)$ et pour tout couple (α, β) de multi-indices positifs :

$$(3.4.18) \qquad \begin{cases} T^{(*\alpha,\beta)} = (T_1^{*\alpha_1} T_1^{\beta_1}, \cdots, T_m^{*\alpha_m} T_m^{\beta_m}). \\ \\ T^{(\alpha,*\beta)} = (T_1^{\alpha_1} T_1^{*\beta_1}, \cdots, T_m^{\alpha_m} T_m^{*\beta_m}). \end{cases}$$

Bien évidemment, on a l'égalité $T^{(*\alpha,0)} = T^{(0,*\alpha)}$, donc on peut noter ce multi-opérateur sans ambiguïté simplement $T^{(*\alpha)}$. De même, on pose $T^{(\alpha)} = T^{(\alpha,0)} = T^{(0,\alpha)}$ (en particulier $T^{(\mathbf{1})} = T$). On se donne alors une opération sur les multi-opérateurs : pour T et R deux multi-opérateurs et pour des multi-indices positifs α, β, δ et ε, on pose :

$$T^{(*\alpha,\beta)} R^{(*\delta,\varepsilon)} = (T_1^{*\alpha_1} T_1^{\beta_1} R_1^{*\delta_1} R_1^{\varepsilon_1}, \cdots, T_m^{*\alpha_m} T_m^{\beta_m} R_m^{*\delta_m} R_m^{\varepsilon_m}).$$

De la même manière, on peut définir $T^{(*\alpha,\beta)} R^{(\delta,*\varepsilon)}$, $T^{(\alpha,*\beta)} R^{(*\delta,\varepsilon)}$ et $T^{(\alpha,*\beta)} R^{(\delta,*\varepsilon)}$.

3.4.18 Théorème : *Soient R et S deux multi-shifts à poids sous-normaux vérifiant la condition $(\diamond)$. Soit T un multi-shift à poids commutatif et sous-normal. Alors pour tout multi-indice $\beta \geq 0$, les multi-opérateurs $R^{(*\beta)} S^{(\beta)} T$ et $T R^{(*\beta)} S^{(\beta)}$ sont sous-normaux.*

Démonstration.

cas 1) Soit $W = (R_1^{*\beta_1} S_1^{\beta_1} T_1, \cdots, R_m^{*\beta_m} S_m^{\beta_m} T_m)$, W est un multi-shift à poids :

$$W_j(\xi_I) = w_I^{(j)} \xi_{I+e_j},$$

où $w_I^{(j)} = t_I^{(j)} s_{i_j+1}^{(j)} \cdots s_{i_j+\beta_j}^{(j)} \overline{r_{i_j+1}^{(j)}} \cdots \overline{r_{i_j+\beta_j}^{(j)}}$ (bien entendu les lettres désignant les poids écrits correspondent aux opérateurs R, S et T). De plus, la commutativité de R, S et T implique clairement celle de W. Enfin, on notera pour tout multi-indice positif I et pour $j = 1, \cdots, m$:

$$(3.4.19) \qquad q_I^{(j)} = s_{i_j+1}^{(j)} \times \cdots \times s_{i_j+\beta_j}^{(j)} \times \overline{r_{i_j+1}^{(j)}} \times \cdots \times \overline{r_{i_j+\beta_j}^{(j)}}.$$

Alors $q_I^{0,\mathbf{1}}$ est donné par la formule suivante : (toujours si $I > 0$, sinon il ne faut prendre que les produits où l'on a $i_j > 0$)

$$|q_{0,\cdots,0}^{(m)}|^2 \times \cdots \times |q_{0,\cdots,i_m-1}^{(m)}|^2 \times \cdots \times |q_{0,i_2-1,\cdots,i_m-1}^{(1)}|^2 \times \cdots \times |q_{i_1-1,\cdots,i_m-1}^{(1)}|^2$$

$$\begin{array}{rcccccccc} = & |s_1^{(m)}|^2 & \cdots & |s_{\beta_m}^{(m)}|^2 & |r_1^{(m)}|^2 & \cdots & |r_{\beta_m}^{(m)}|^2 \\ & |s_2^{(m)}|^2 & \cdots & |s_{\beta_m+1}^{(m)}|^2 & |r_2^{(m)}|^2 & \cdots & |r_{\beta_m+1}^{(m)}|^2 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & |s_{i_m}^{(m)}|^2 & \cdots & |s_{\beta_m+i_m-1}^{(m)}|^2 & |r_{i_m}^{(m)}|^2 & \cdots & |r_{\beta_m+i_m-1}^{(m)}|^2 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & |s_1^{(1)}|^2 & \cdots & |s_{\beta_1}^{(1)}|^2 & |r_1^{(1)}|^2 & \cdots & |r_{\beta_1}^{(1)}|^2 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & |s_{i_1}^{(1)}|^2 & \cdots & |s_{\beta_1+i_1-1}^{(1)}|^2 & |r_{i_1}^{(1)}|^2 & \cdots & |r_{\beta_1+i_1-1}^{(1)}|^2 \end{array}$$

Si on fait le produit colonnes par colonnes, on obtient les produits suivants :
(3.4.20)
$$\frac{s^{0,e_1}_{(i_1+1)e_1}\cdots s^{0,e_m}_{(i_m+1)e_m}}{s^{0,\mathbf{1}}_{\mathbf{1}}}\times\cdots\times\frac{s^{0,e_1}_{(i_1+\beta_1)e_1}\cdots s^{0,e_m}_{(i_m+\beta_m)e_m}}{s^{0,e_1}_{\beta_1}\cdots s^{0,e_m}_{\beta_m}}\times\frac{r^{0,e_1}_{(i_1+1)e_1}\cdots r^{0,e_m}_{(i_m+1)e_m}}{r^{0,\mathbf{1}}_{\mathbf{1}}}\times\cdots$$
$$\times\frac{r^{0,e_1}_{(i_1+\beta_1)e_1}\cdots r^{0,e_m}_{(i_m+\beta_m)e_m}}{r^{0,e_1}_{\beta_1}\cdots r^{0,e_m}_{\beta_m}}$$

Ceci n'est rien d'autre que :

$$\frac{s^{0,\mathbf{1}}_{I+\mathbf{1}}}{s^{0,\mathbf{1}}_{\mathbf{1}}}\times\cdots\times\frac{s^{0,\mathbf{1}}_{I+\beta}}{s^{0,e_1}_{\beta_1}\cdots s^{0,e_m}_{\beta_m}}\times\frac{r^{0,\mathbf{1}}_{I+\mathbf{1}}}{r^{0,\mathbf{1}}_{\mathbf{1}}}\times\cdots\times\frac{r^{0,\mathbf{1}}_{I+\beta}}{r^{0,e_1}_{\beta_1}\cdots r^{0,e_m}_{\beta_m}}. \tag{3.4.21}$$

Comme R et S sont tous les deux des multi-shifts sous-normaux, les multi-suites $\left(\frac{s^{0,\mathbf{1}}_{I+\mathbf{1}}}{s^{0,\mathbf{1}}_{\mathbf{1}}}\right)_{I\geq 0},\cdots,\left(\frac{s^{0,\mathbf{1}}_{I+\beta}}{s^{0,e_1}_{\beta_1}\cdots s^{0,e_m}_{\beta_m}}\right)_{I\geq 0},\left(\frac{r^{0,\mathbf{1}}_{I+\mathbf{1}}}{r^{0,\mathbf{1}}_{\mathbf{1}}}\right)_{I\geq 0},\cdots,\left(\frac{r^{0,\mathbf{1}}_{I+\beta}}{r^{0,e_1}_{\beta_1}\cdots r^{0,e_m}_{\beta_m}}\right)_{I\geq 0}$ sont toutes des multi-suites de moments de Stieltjes (voir le théorème 3.3.2 et la remarque 3.4.4 (1)). On applique alors la propriété du produit de Schur sur les suites de moments de Stieltjes pour conclure que $(q^{0,\mathbf{1}}_I)_{I\geq 0}$ est une suite de moments de Stieltjes. Toujours par un procédé identique, on obtient qu'il en est de même pour $(w^{0,\mathbf{1}}_I)_{I\geq 0}$ et donc le multi-opérateur $W=(R_1^{*\beta_1}S_1^{\beta_1}T_1,\cdots,R_m^{*\beta_m}S_m^{\beta_m}T_m)$ est un multi-shift sous-normal.

cas 2) Supposons maintenant que $W=(T_1R_1^{*\beta_1}S_1^{\beta_1},\cdots,T_mR_m^{*\beta_m}S_m^{\beta_m})$, W est un multi-shift à poids commutatif. Dans ce cas-ci, ces derniers valent :

$$w^{(j)}_I=s^{(j)}_{i_j}\cdots s^{(j)}_{i_j+\beta_j-1}\overline{r^{(j)}_{i_j+\beta_j-1}}\cdots\overline{r^{(j)}_{i_j}}t^{(j)}_I. \tag{3.4.22}$$

Quite à translater d'un indice, on est dans le premier cas. ■

3.4.19 Corollaire : *Soient R et S deux multi-shifts à poids sous-normaux (sur un espace de* Hilbert *$\mathcal{H}$) vérifiant la condition ($\diamond$). Soit T un α-multi-shift à poids commutatif et sous-normal sur le même espace $\mathcal{H}$. Alors pour tout multi-indice positif β, les multi-opérateurs $R^{(*\alpha\beta)}S^{(\alpha\beta)}T$ et $TR^{(*\alpha\beta)}S^{(\alpha\beta)}$ sont sous-normaux.*

Démonstration.
Soit $\mathcal{H}_\delta$ l'espace de Hilbert engendré par les vecteurs $(\xi_{\delta+M\alpha})_{M\geq 0}$ $(\delta<\alpha)$. On note par R_δ, S_δ et T_δ les restrictions de $R^{(\alpha\beta)}$, $S^{(\alpha\beta)}$ et $T^{(\alpha\beta)}$ respectivement à $\mathcal{H}_\delta$. On a :

$$R^{(\alpha\beta)}=\bigoplus_{0\leq\delta<\alpha}R_\delta,\quad S^{(\alpha\beta)}=\bigoplus_{0\leq\delta<\alpha}S_\delta,\quad T^{(\alpha\beta)}=\bigoplus_{0\leq\delta<\alpha}T_\delta. \tag{3.4.23}$$

$R^{(\alpha)}$ et $S^{(\alpha)}$ sont des α-multi-shifts, on utilise la même décomposition :

$$R^{(\alpha)}=\bigoplus_{0\leq\delta<\alpha}\tilde{R}_\delta\quad\text{et}\quad S^{(\alpha)}=\bigoplus_{0\leq\delta<\alpha}\tilde{S}_\delta.$$

De plus, les $(\tilde{R}_\delta)_\delta$ et les $(\tilde{S}_\delta)_\delta$ sont des $\mathbf{1}$-multi-shifts. On a également :

$$\tilde{R}^{(\beta)}_\delta=R_\delta\quad\text{et}\quad\tilde{S}^{(\beta)}_\delta=S_\delta.$$

Donc, on obtient l'égalité suivante :

$$R^{(*\alpha\beta)}S^{(\alpha\beta)}T = \bigoplus_{0\leq\delta<\alpha} \tilde{R}_\delta^{(*\beta)}\tilde{S}_\delta^{(\beta)}T_\delta. \tag{3.4.24}$$

Puis, on applique le théorème précédent 3.4.18 à chaque $\tilde{R}_\delta^{(*\beta)}\tilde{S}_\delta^{(\beta)}T_\delta$ pour obtenir la sous-normalité de ces multi-opérateurs (le fait que R et S vérifient la condition $(\diamond)$ implique qu'il en est de même pour leurs restrictions aux espaces $\mathcal{H}_\delta$). Enfin, on conclut sur la sous-normalité de $R^{(*\alpha\beta)}S^{(\alpha\beta)}T$ en utilisant la proposition 3.4.15. C'est la même méthode pour les multi-opérateurs de la forme $TR^{(*\alpha\beta)}S^{(\alpha\beta)}$. ∎

Ce corollaire 3.4.19 peut, en fait, être vu comme une version multi-opératorielle du théorème 1 de [St-Sz4]. Il n'est pas possible d'obtenir les quatre types d'opérateurs (de l'énoncé du théorème 1 de [St-Sz4]) dans le cas multi-dimensionnel à cause de problèmes de commutativité.

3.4.20 Corollaire : *Soient α, β et et δ des multi-indices plus grand que $\mathbf{1}$ tels que chaque δ_i divise β_i $(i = 1, \cdots, m)$. Si R et S sont des α-multi-shifts à poids sous-normaux vérifiant $(\diamond)$, et si T est un α-multi-shift à poids commutatif et sous-normal, les multi-opérateurs $R^{(*\beta)}S^{(\beta)}T^{(\delta)}$ et $T^{(\delta)}R^{(*\beta)}S^{(\beta)}$ sont sous-normaux également.*

Démonstration.
On raisonne comme dans le corollaire précédent, soient $\mathcal{H}_\varepsilon$ les espaces de Hilbert engendrés par les vecteurs $(\xi_{\varepsilon+M\alpha})_{M\geq 0}$ respectivement $(0 \leq \varepsilon < \alpha)$. On note par R_ε, S_ε et T_ε les restrictions de R, S et T respectivement à $\mathcal{H}_\varepsilon$. Ces restrictions sont des multi-shifts à poids. A nouveau, on a une représentation de la forme :

$$R = \bigoplus_{0\leq\varepsilon<\alpha} R_\varepsilon, \quad S = \bigoplus_{0\leq\varepsilon<\alpha} S_\varepsilon, \quad T = \bigoplus_{0\leq\varepsilon<\alpha} T_\varepsilon. \tag{3.4.25}$$

Dans ces conditions, sur $\mathcal{H}_\varepsilon$, R_ε et S_ε sont des multi-shifts à poids et $T_\varepsilon^{(\delta)}$ est un δ-multi-shift à poids. Et on a les décompositions suivantes :

$$\begin{cases} R^{(*\beta)}S^{(\beta)}T^{(\delta)} = \bigoplus_{0\leq\varepsilon<\alpha} R_\varepsilon^{(*\beta)}S_\varepsilon^{(\beta)}T_\varepsilon^{(\delta)} \\ \\ T^{(\delta)}R^{(*\beta)}S^{(\beta)} = \bigoplus_{0\leq\varepsilon<\alpha} T_\varepsilon^{(\delta)}R_\varepsilon^{(*\beta)}S_\varepsilon^{(\beta)} \end{cases} \tag{3.4.26}$$

La condition $(\diamond)$ demandée dans l'hypothèse nous permet alors d'appliquer le corollaire précédent 3.4.19, d'autant plus que l'on a supposé que chaque δ_i divisait β_i $(i = 1, \cdots, m)$. Enfin, on applique la proposition 3.4.15. ∎

Ce résultat peut être vu comme une version multi-opératorielle du corollaire 1 de [St-Sz4].

Nous allons maintenant donner un exemple concret sur lequel tous ces résultats s'appliquent, c'est à dire un exemple de multi-shift à poids unilatéral qui vérifie la condition $(\diamond)$.

3.4.21 Exemple : On reprend l'exemple (le multi-shift de Création) 3.3.13. On a déjà remarqué que ce multi-opérateur était sous-normal. On peut en donner une autre démonstration. on commence par rappeler que cet opérateur est en fait un multi-shift à poids. Par les égalités 3.3.30, on obtient :

$$||A^N f_0||^2 = ||\Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)^{|N|} f_N||^2 = p_1! \cdots p_m! \sqrt{\pi}^m. \tag{3.4.27}$$

Or nous avons déjà remarqué que la multi-suite $(p_1! \cdots p_m! \sqrt{\pi}^m)_{p_1,\cdots,p_m \geq 0}$ était une multi-suite de moments de STIELTJES grâce à la représentation 3.3.32. Et donc le multi-opérateur A est sous-normal par le théorème 3.4.3. De plus, comme

$$A_j(f_P) = (-1/\sqrt{2}) f_{P+e_j},$$

le multi-opérateur A vérifie bien la condition ($\diamond$) et donc on peut lui appliquer le théorème 3.4.18. Ceci implique que les multi-opérateurs $A^{(*\beta,\beta+\mathbf{1})}$ et $AA^{(*\beta,\beta)}$ sont sous-normaux (où les notations sont celles donnés par les formules (3.4.18) de la définition 3.4.17), pour tout multi-indice positif β. Enfin, le corollaire 3.4.19 nous permet d'affirmer que les multi-opérateurs $A^{(*\alpha\beta,\alpha\beta)}A^{(\alpha)}$ et $A^{(\alpha)}A^{(*\alpha\beta,\alpha\beta)}$ sont sous-normaux également, pour tout multi-indice positif β.

Partie III.5 Notions de minimalité d'extensions normales et relations spectrales

Dans la partie III-3, nous avons donné plusieurs critères de sous-normalité pour des multi-opérateurs non bornés. Après avoir utilisé ces critères pour les multi-shifts à poids, on va donner deux notions de minimalité (qui coïncident dans le cas borné mais pas dans le cas non borné, voir [St-Sz3] pour des exemples prouvant la différence). On montre, en particulier, que l'extension créée pour donner un critère de sous-normalité jointe au théorème 3.3.2 (ainsi qu'au corollaire 3.3.4) peut être vue comme minimale dans un certain sens. Dans toute cette partie, $S = (S_1, ..., S_m)$ sera un multi-opérateur *permutable* sur un espace de HILBERT $\mathcal{H}$ (pour la définition de *permutable*, on peut se référer à l'article [Io-Vas]).

Soit $\mathcal{K}$ un espace de HILBERT et soit N un opérateur normal de mesure spectrale E. Soit $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{K}$. Alors on a l'équivalence (voir le théorème 13.33 de [Ru] ou l'exercice 3 p.1257 de [Du-Schw]) entre le fait que la projection orthogonale $P_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{M}$ vérifie :

$$P_{\mathcal{M}} N \subset N P_{\mathcal{M}}, \tag{3.5.1}$$

et le fait que la mesure spectrale commute avec cette projection orthogonale, ce qui revient à dire que l'on a :

$$P_{\mathcal{M}} E(\tau) = E(\tau) P_{\mathcal{M}}, \quad \forall \tau \in Bor(\mathbb{C}). \tag{3.5.2}$$

Si $\mathcal{M}$ vérifie l'une de ces conditions, il sera appelé « *espace réduisant* » l'opérateur N.

3.5.1 Définitions : Soit $S = (S_1, \cdots, S_m)$ un multi-opérateur sous-normal dans $\mathcal{H}$ et soit $N = (N_1, \cdots, N_m)$ une extension normale de S (définie dans l'espace de HILBERT $\mathcal{K}_N$) ; N sera dite *minimale de type spectral* si le seul sous-espace fermé (contenant $\mathcal{H}$) de $\mathcal{K}_N$ réduisant chaque N_i est $\mathcal{K}_N$ lui-même.

Si T est une autre extension normale de S, on dira que N et T sont deux extensions équivalentes *modulo* $\mathcal{H}$ et on notera $N \approx T \ mod(\mathcal{H})$ s'il existe une famille $(U_1, \cdots, U_m)$ commutative d'opérateurs unitaires de $\mathcal{K}_T$ dans $\mathcal{K}_N$ telle que l'on ait :

$$\begin{cases} U_i x = x, & \forall x \in \mathcal{H}. \\ \\ U_i T_i = N_i U_i. \end{cases} \tag{3.5.3}$$

Si on a $U_1 = \cdots = U_m = U$, on dira que les multi-opérateurs N et T sont égaux modulo $\mathcal{H}$ (on notera $N = T \ mod(\mathcal{H})$).

3.5.2 Remarque : Soit E la mesure spectrale jointe de l'extension normale $N = (N_1, \cdots, N_m)$ de S. Posons :

$$\mathcal{H}[N] = \overline{Vect\{E(\sigma)f, \quad f \in \mathcal{H}, \quad \sigma \in Bor(\mathbb{C}^m)\}}. \tag{3.5.4}$$

Alors, on a bien évidemment $E(*)\mathcal{H}[N] \subset \mathcal{H}[N]$. De plus, si $g \perp \mathcal{H}[N]$, et si τ et σ sont des ensembles boréliens, on obtient pour tout vecteur f de $\mathcal{H}$:

$$\langle E(\sigma)f, E(\tau)g\rangle = \langle E(\tau)E(\sigma)f, g\rangle = \langle E(\tau \cap \sigma)f, g\rangle = 0. \tag{3.5.5}$$

Grâce à l'égalité précédente, on peut montrer que $\mathcal{H}[N]$ réduit le multi-opérateur normal N. En effet, si E_i est la mesure spectrale de l'opérateur N_i ($i = 1, \cdots, m$) et si $f = f_1 + f_2 \in \mathcal{H}[N] \oplus \mathcal{H}[N]^\perp$ on a pour tout borélien τ de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}[N]}E_i(\tau)f &= P_{\mathcal{H}[N]}E(\cdots \mathbb{C} \times \tau \times \mathbb{C} \times \cdots)f \\ &= P_{\mathcal{H}[N]}E(\cdots \mathbb{C} \times \tau \times \mathbb{C} \times \cdots)f_1 + P_{\mathcal{H}[N]}E(\cdots \mathbb{C} \times \tau \times \mathbb{C} \times \cdots)f_2 \\ &= P_{\mathcal{H}[N]}E(\cdots \mathbb{C} \times \tau \times \mathbb{C} \times \cdots)f_1 \\ &= E(\cdots \mathbb{C} \times \tau \times \mathbb{C} \times \cdots)f_1 = E_i(\tau)P_{\mathcal{H}[N]}f, \end{aligned}$$

où bien sûr $P_{\mathcal{H}[N]}$ est la projection orthogonale de $\mathcal{K}_N$ sur $\mathcal{H}[N]$. Par conséquent, on en conclut que $\mathcal{H}[N]$ réduit le multi-opérateur N. On définit alors le multi-opérateur $N_S = (N_{S,1}, \cdots, N_{S,m})$ par :

$$N_{S,i}f = N_i f, \quad \forall f \in \mathcal{D}(N_{S,i}) = \mathcal{D}(N_i) \cap \mathcal{H}[N]. \tag{3.5.6}$$

On remarque que N_S est une extension de S.

3.5.3 Proposition : *Soit S un multi-opérateur sous-normal dans un espace de* Hilbert $\mathcal{H}$. *Soit N une extension normale de S dans $\mathcal{K}_N \supset \mathcal{H}$. Le multi-opérateur N_S est normal. En particulier, toute extension normale N est minimale de type spectral si et seulement si elle vérifie :*

$$N_S = N.$$

Ceci implique que l'on ait : $(N_S)_S = N_S$.

Démonstration.
Soit P_N la projection orthogonale de $\mathcal{K}_N$ sur $\mathcal{H}[N]$. On vient de remarquer que :

(3.5.7), $$P_N E_i(*) = E_i(*)P_N, \; i = 1, \cdots, m$$

où les $E_1, \cdots, E_m$ sont les mesures spectrales associées aux opérateurs normaux $N_1, \cdots, N_m$. On pose alors $F(*) = P_N E(*)|_{\mathcal{H}[N]}$ qui est une mesure spectrale. De plus, on a :

$$P_N \int z_i dE_i(z, \overline{z})x = N_i x = N_{S,i}x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(N_i) \cap \mathcal{H}[N].$$

Donc, on obtient :

$$N_{S,i} = \int z_i dF(z, \overline{z}),$$

ce qui entraine que le multi-opérateur N_S est normal (et on a $N_{S,i} \subset N_i$ pour $i = 1, \cdots, m$). Si N est minimal de type spectral, on a par (3.5.7) $P_N = P_{\mathcal{K}_N}$. On en conclut que $\mathcal{K}_N = \mathcal{H}[N]$, c'est-à-dire que $N = N_S$.

Si $\mathcal{M}$ est un espace fermé réduisant N, on a $P_{\mathcal{M}} E_i = E_i P_{\mathcal{M}}$ $(i = 1, \cdots, m)$. En particulier, pour tout vecteur f de $\mathcal{H}$, on a $P_{\mathcal{M}} E_i(*) f = E_i(*) f$. Donc pour tout borélien σ de $\mathbb{C}^m$, et pour tout f de $\mathcal{H}$, on a $P_{\mathcal{M}} E(\sigma) f = E(\sigma) f$, ce qui entraine que $\mathcal{H}[N] \subset \mathcal{M}$. ■

3.5.4 Lemme : *Si $N = T$ mod$(\mathcal{H})$, alors pour tout borélien σ de $\mathbb{C}^m$, on a :*

$$E_T(\sigma) = U^{-1} E_N(\sigma) U,$$

où $U = U_1 = \cdots = U_m$ est donné par (3.5.3).

3.5.5 Proposition : *Soit S un multi-opérateur sous-normal dans $\mathcal{H}$. Supposons que N et T soient deux extensions normales de S, égales modulo $\mathcal{H}$. Alors N est minimale de type spectral si et seulement si T l'est aussi.*

Démonstration.
Il faut et il suffit de montrer, grâce à la proposition 3.5.3, que $N = N_S$ si et seulement si $T = T_S$. Si l'extension N est minimale, on a par (3.5.4) :

$$\mathcal{H}[N] = \overline{Vect\{E_N(\sigma) f, \quad f \in \mathcal{H}, \sigma \in Bor(\mathbb{C}^m)\}} \tag{3.5.8}$$

et $\mathcal{D}(N_i) = \mathcal{D}(N_i) \cap \mathcal{H}[N]$. Mais, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[T] &= \overline{Vect\{E_T(\sigma) f, \quad f \in \mathcal{H}, \quad \sigma \in Bor(\mathbb{C}^m)\}} \\ &= \overline{Vect\{U^{-1} E_N(\sigma) U f, \quad f \in \mathcal{H}, \quad \sigma \in Bor(\mathbb{C}^m)\}} \\ &= \overline{Vect\{U^{-1} E_N(\sigma) f, \quad f \in \mathcal{H}, \quad \sigma \in Bor(\mathbb{C}^m)\}} = U^{-1} \mathcal{H}[N], \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

car l'opérateur U^{-1} est borné inversible. De plus, comme $UT_i = N_i U$, on en déduit $\mathcal{D}(T_i) = U^{-1}(\mathcal{D}(N_i))$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T_i) \cap \mathcal{H}[T] &= U^{-1}\Big(\mathcal{D}(N_i)\Big) \cap U^{-1}\Big(\mathcal{H}[N]\Big) = U^{-1}\Big(\mathcal{D}(N_i) \cap \mathcal{H}[N]\Big) \\ &= U^{-1}\Big(\mathcal{D}(N_i)\Big) = \mathcal{D}(T_i). \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

Et donc, on obtient que $T = T_S$. ■

On vient de donner une première définition de minimalité grâce aux projections spectrales. Il existe une autre méthode (dans le cas borné) pour définir la minimalité des extensions normales : on prend les itérés de l'adjoint d'une extension normale. Dans le cas non borné, ces deux notions ne coïncident pas, comme le prouvent Stochel et Szafraniec pour le cas d'un seul multi-opérateur (voir dans [St-Sz3] l'exemple 1 et la remarque en bas de la page 114).

3.5.6 Définition : Soit S un multi-opérateur de $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace dense d'un espace de HILBERT $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(S_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(S_m)$ et tel que $\mathcal{D}$ soit invariant par chaque S_j $(j = 1, \cdots, m)$ et tel que $S|_{\mathcal{D}}$ soit sous-normal. Soit N une extension normale de $S|_{\mathcal{D}}$. On pose :

$$\mathcal{H}_{\blacktriangle}(N) = \overline{Vect\Big\{N^{*\alpha}x, \quad x \in \mathcal{D}, \quad \alpha \geq 0\Big\}}. \tag{3.5.11}$$

On notera par V_N l'espace vectoriel $Vect\Big\{N^{*\alpha}x,\, x \in \mathcal{D},\, \alpha \geq 0\Big\}$. On peut noter que les propriétés supposées pour $\mathcal{D}$ impliquent que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^{\infty}(N)$. En particulier, on peut bien faire agir les itérés des adjoints $(N_1^*, \cdots, N_m^*)$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ puisque :

$$\mathcal{D}(N^{*\alpha}) = \{x \text{ tel que } \int |\overline{z}^{\alpha}|^2 \langle dE(z, \overline{z})x, x\rangle < \infty\} = \mathcal{D}(N^{\alpha}) \supset \mathcal{D}.$$

En accord avec la définition donnée par STOCHEL et SZAFRANIEC pour un seul opérateur, on définit le multi-opérateur $N_{\blacktriangle} = (N_{\blacktriangle,1}, \cdots, N_{\blacktriangle,m})$ en posant :

$$N_{\blacktriangle,j} = \Big(N_j|_{V_N}\Big)^{-}, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{3.5.12}$$

En accord avec la dénomination donnée par STOCHEL et SZAFRANIEC, le multi-opérateur $N_{\blacktriangle} = (N_{\blacktriangle,1}, \cdots, N_{\blacktriangle,m})$ sera appelé *extension Minimale de Type Cyclique* associée à l'extension normale N, ou plus simplement *MTC-extension.*

3.5.7 Propriété : *Soit $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ un multi-opérateur sous-normal, où $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense invariant par les S_i $(i = 1, \cdots, m)$. Supposons que $S|_{\mathcal{D}}$ admette une MTC-extension normale $N_{\blacktriangle}$ associée à une extension normale N de S. Alors, on a :*

$$\mathcal{H}_{\blacktriangle}(N) = \mathcal{H}_{\blacktriangle}(N_{\blacktriangle}).$$

Ceci entraîne en particulier l'égalité $(N_{\blacktriangle})_{\blacktriangle} = N_{\blacktriangle}$.

Démonstration.
On sait que si T est un opérateur normal dans $\mathcal{H}$ et si R est une extension normale de T, on a $T^* = R^*|_{\mathcal{D}(T)}$ (voir le lemme 4.2 de [Vas3]). Donc, pour tout $x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(N_{\blacktriangle,j})$, on a $N_{\blacktriangle}^{*\alpha}x = N^{*\alpha}x$; ce qui implique le résultat demandé. ■

3.5.8 Proposition : *Soit $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ un multi-opérateur sous-normal, où $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense invariant par les S_i $(i = 1, \cdots, m)$. Alors S admet une MTC-extension sous-normale.*

Démonstration.
Soit N une extension normale de S et soit $N_{\blacktriangle} = (N_{\blacktriangle,1}, \cdots, N_{\blacktriangle,m})$ sa MTC-extension associée. On a $N_{\blacktriangle,j} \subset N_j$ $(j = 1, \cdots, m)$ donc $N_{\blacktriangle}$ est également sous-normal. ■

3.5.9 Remarque : Soient $N_{\blacktriangle}^{(a)}$ et $N_{\blacktriangle}^{(b)}$ deux MTC-extensions associées aux extensions normales N_a et N_b de $S|_{\mathcal{D}}$, respectivement (où $\mathcal{D}$ vérifie les conditions de la définition

3.5.6). Alors, on peut relier $N_\blacktriangle^{(a)}$ et $N_\blacktriangle^{(b)}$. Pour ce faire, on définit l'opérateur U par :

$$U : \begin{cases} \mathcal{H}_\blacktriangle(N_a) & \to \quad \mathcal{H}_\blacktriangle(N_b) \\ \\ N_a^{*\alpha}x & \to \quad N_b^{*\alpha}x \end{cases}$$

On peut vérifier que U est une isométrie. En effet, si $(x_\alpha)_\alpha$ est une multi-suite finie d'éléments de $\mathcal{D}$, on a :

$$(3.5.13) \qquad ||\sum_{\alpha\geq 0} N_a^{*\alpha}x_\alpha||^2 = \sum_{\alpha,\beta\geq 0}\langle N_a^{*\alpha}x_\alpha, N_a^{*\beta}x_\beta\rangle = \sum_{\alpha,\beta\geq 0}\langle N_a^{\beta}x_\alpha, N_a^{\alpha}x_\beta\rangle.$$

On en déduit que cette expression n'est autre que :

$$(3.5.14) \qquad \sum_{\alpha,\beta\geq 0}\langle S^\beta x_\alpha, S^\alpha x_\beta\rangle = ||\sum_{\alpha\geq 0} N_b^{*\alpha}x_\alpha||^2,$$

par un calcul similaire. On prolonge alors U à $\mathcal{H}_\blacktriangle(N_a)$ tout entier par continuité. On en déduit que U est un opérateur unitaire de $\mathcal{H}_\blacktriangle(N_a)$ sur $\mathcal{H}_\blacktriangle(N_b)$. Nous allons maintenant prouver que les deux multi-opérateurs $N_\blacktriangle^{(a)}$ et $N_\blacktriangle^{(b)}$ sont égaux modulo $\mathcal{H}$. On commence par remarquer que $U|_\mathcal{H}$ est l'identité sur $\mathcal{H}$ grâce à la densité de $\mathcal{D}$. Soit maintenant un vecteur $x \in \mathcal{D}(N_{a,i}) \cap Vect\{N_a^{*\alpha}x_\alpha),\ \alpha \geq 0,\ x_\alpha \in \mathcal{D}\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} UN_{a,i}x &= UN_{a,i}\sum_{\alpha\geq 0} N_a^{*\alpha}x_\alpha = U\sum_{\alpha\geq 0} N_a^{*\alpha}S_ix_\alpha \\ &= U\sum_{\alpha\geq 0} N_a^{*\alpha}N_{b,i}x_\alpha = \sum_{\alpha\geq 0} N_b^{*\alpha}N_{b,i}x_\alpha = N_{b,i}Ux. \end{aligned}$$

Maintenant si $x \in \mathcal{D}(N_{a,i})\cap\mathcal{H}_\blacktriangle(N_a)$, il existe une suite $(x_n)_n$ dans $\mathcal{D}(N_{a,i})\cap Vect\{N_a^{*\alpha}x_\alpha),\ \alpha \geq 0,\ x_\alpha \in \mathcal{D}\}$ telle que $x_n \to x$ et $N_{a,i}x_n \to N_{a,i}x$. Par continuité, on a $UN_{a,i}x_n \to UN_{a,i}x$. Or on vient de prouver que $UN_{a,i}x_n = N_{b,i}Ux_n$. Donc les couples $(Ux_n, N_{b,i}Ux_n)_n$ sont dans le graphe de l'opérateur $N_{b,i}$ et convergent vers $(Ux, UN_{a,i}x)$. Comme cet opérateur est fermé, il en découle que $Ux \in \mathcal{D}(N_{b,i})$ et $UN_{a,i}x = N_{b,i}Ux$, ce qui n'est autre que l'inclusion $UN_{a,i} \subset N_{b,i}U$. Pour l'inclusion inverse, c'est exactement la même technique qui s'applique.

On en déduit que deux MTC-extensions (sous-normales) d'un multi-opérateur $S|_\mathcal{D}$ sont égales modulo $\mathcal{H}$.

3.5.10 Théorème : *Soit $S|_\mathcal{D} = (S_1|_\mathcal{D}, \cdots, S_m|_\mathcal{D})$ un multi-opérateur sous-normal, où $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense invariant par les S_i $(i = 1, \cdots, m)$. Supposons que $S|_\mathcal{D}$ admette une MTC-extension normale. Alors toute extension normale de $S|_\mathcal{D}$ est minimale de type spectral si et seulement si elle l'est de type cyclique.*

Démonstration.
Soit $N_\blacktriangle$ une MTC-extension de $S|_\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}_\blacktriangle(N)$ associée à l'extension normale N. Montrons que cette extension est minimale de type cyclique. Par la remarque 3.5.9, on sait que deux MTC-extensions sont égales modulo $\mathcal{H}$. Donc si l'une est normale

l'autre l'est également. Il s'en suit que $N_\blacktriangle$ est un multi-opérateur normal. Soit E la mesure spectrale de ce multi-opérateur et soit $(N_\blacktriangle)_S$ son extension minimale de type spectral associée. Grâce à la proposition 3.5.7, on sait que $\mathcal{H}_\blacktriangle(N) = \mathcal{H}_\blacktriangle(N_\blacktriangle)$. On a l'inclusion :

$$\mathcal{H}[N_\blacktriangle] \subset \overline{\mathcal{D}(N_\blacktriangle)} \subset \mathcal{H}_\blacktriangle(N).$$

En effet, $\mathcal{H}[N_\blacktriangle]$ est engendré par les vecteurs de la forme $E(*)f$ avec $f \in \mathcal{H}$ et comme $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et que $E(*)$ sont des projections, on peut trouver une suite de $\mathcal{D}(N_\blacktriangle)$ qui converge vers $E(*)f$. La seconde inclusion découle directement de la proposition 3.5.7. Soit $g \in \mathcal{H}_\blacktriangle(N_\blacktriangle) \cap \mathcal{H}[N_\blacktriangle]^\perp$ et soit $f \in \mathcal{D}$, on a pour tout ensemble borélien σ de $\mathbb{C}^m$ $E(\sigma)f \in \mathcal{H}[N_\blacktriangle]$. Donc, on a $\langle E(\sigma)f, g\rangle = 0$. Ceci entraîne :

$$(3.5.15) \qquad \langle N_\blacktriangle^{*\alpha} f, g\rangle = \lim_{M\to\infty} \int_{\cap\{|z_j|<M\}} \overline{z}^\alpha d\langle E(z)f, g\rangle = 0.$$

(on peut approximer la fontion $z \to \overline{z}^\alpha$ par des fonctions en escalier). Donc g est orthogonal à l'espace $\mathcal{H}_\blacktriangle(N_\blacktriangle)$ et donc $g = 0$ par la proposition 3.5.7. Par conséquent, on a $\mathcal{H}_\blacktriangle(N_\blacktriangle) = \mathcal{H}[N_\blacktriangle]$, d'où l'égalité $N_\blacktriangle = (N_\blacktriangle)_S$. Ceci signifie que $N_\blacktriangle$ est un multi-opérateur minimal de type spectral.

Inversement, si T est une extension normale minimale de type spectral, soit $T_\blacktriangle$ la MTC-extension sous-normale associée à T. Alors, par la remarque précédente 3.5.9, on sait que $T_\blacktriangle$ est normal (toutes les MTC-extensions sont égales modulo $\mathcal{H}$ et l'une d'elle est normale par hypothèse). Bien évidemment $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_\blacktriangle(T)$, montrons que $\mathcal{H}_\blacktriangle(T)$ réduit T. Soit F la mesure spectrale de T. Alors, on a :

$$F(\tau)\sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha = \sum_{\alpha\geq 0}\int_\tau \overline{z}^\alpha dF(z,\overline{z})x_\alpha = \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}F(\tau)x_\alpha \in \mathcal{H}_\blacktriangle(T),$$

voir [Du-Schw] page 1199, corollaire 7(d). Or on a $F(\tau)x_\alpha \in \mathcal{H}$ car $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_\blacktriangle(T)$ et $F(\tau)$ est une projection orthogonale. Si $g \perp \mathcal{H}_\blacktriangle(T)$, on obtient :

$$\langle \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}x_\alpha, F(\tau)g\rangle = \langle \sum_{\alpha\geq 0} T^{*\alpha}F(\tau)x_\alpha, g\rangle = 0.$$

Comme pour la proposition 3.5.3, on en conclut que $\mathcal{H}_\blacktriangle(T)$ réduit T. Par minimalité (de type spectral), on en conclut que $\mathcal{H}_\blacktriangle(T) = \mathcal{H}[T_\blacktriangle]$ et donc T est minimal de type cyclique. ■

3.5.11 Corollaire : *Soit $S|_\mathcal{D} = (S_1|_\mathcal{D}, \cdots, S_m|_\mathcal{D})$ un multi-opérateur sous-normal, où $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense invariant par les S_i $(i = 1, \cdots, m)$. Si $S|_\mathcal{D}$ a au moins une MTC-extension normale, toutes les extensions minimales de type spectrales sont égales modulo $\mathcal{H}$.*

Démonstration.
En effet, dans ces conditions, minimalité de type cyclique et de type spectral coïncident. Or nous savons que deux extensions minimales de type cyclique sont égales modulo $\mathcal{H}$, ce qui prouve le corollaire. ■

Toujours en supposant que $S|_{\mathcal{D}}$ admette une MTC-extension normale (qui est, d'après le théorème 3.5.10, minimale de type spectrale) associée à l'opérateur normal N, on peut donner explicitement l'extension minimale en fonction de la mesure spectrale jointe de N. En fait, on montre que cette extension n'est rien d'autre que celle construite pour donner les conditions de sous-normalité dans la section III-3 (voir le théorème 3.3.2 et le corollaire 3.3.4).

3.5.12 Proposition : *Soit $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ un multi-opérateur sous-normal, où $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense invariant par les S_i $(i = 1, \cdots, m)$. Supposons que $S|_{\mathcal{D}}$ admette une MTC-extension normale associée à un multi-opérateur normal. Alors l'extension minimale est formée par les fermetures canoniques des multiplications par $z_1, \cdots, z_m$ dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}$.*

Démonstration.
Si $S|_{\mathcal{D}} = (S_1|_{\mathcal{D}}, \cdots, S_m|_{\mathcal{D}})$ est sous-normal, Soit N une extension normale de S. On note par $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme :

$$\int_{\mathbb{C}^m} \frac{\overline{z}^{\alpha} z^{\beta}}{(1+|z|^2)^{\delta}} dE(\overline{z}, z)x, \quad \forall x \in \mathcal{D}. \tag{3.5.16}$$

Bien évidemment $\mathcal{H}_{\blacktriangle}(N)$ est inclus dans $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. De plus, les fonctions $(1+|z|^2)^{-\delta}$ sont des fonctions continues bornées donc elles sont limites uniformes de fonctions en escalier. Donc les éléments de la forme $\int_{\mathbb{C}^m} \frac{1}{(1+|z|^2)^{\delta}} dE(\overline{z}, z)x$ (avec $x \in \mathcal{D}$) sont dans $\mathcal{H}_{\blacktriangle}(N) = \mathcal{H}[N]$. On en déduit que :

$$\int_{\mathbb{C}^m} \frac{\overline{z}^{\alpha} z^{\beta}}{(1+|z|^2)^{\delta}} dE(\overline{z}, z)x = \int_{\mathbb{C}^m} \overline{z}^{\alpha} z^{\beta} dE(\overline{z}, z) \int_{\mathbb{C}^m} (1+|z|^2)^{-\delta} dE(\overline{z}, z)x, \tag{3.5.17}$$

est dans $\mathcal{H}_{\blacktriangle}(N) = \mathcal{H}[N]$; ceci revient à dire que $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}_{\blacktriangle}(N) = \mathcal{H}[N]$. On identifie enfin $\int f(z) dE(\overline{z}, z)x$ avec $f \otimes x$ et $N_j(1 \otimes x) = S_j x$ pour obtenir le résultat désiré (voir la démonstration du théorème 3.3.2). ■

Toute la fin de cette partie sera dédiée aux liens qui existent entre le spectre joint de S et d'une extension minimale de type spectrale (ou de type cyclique). Certaines affirmations sont évidentes mais afin d'être complet, on les rappellera tout de même. Pour ce faire, on commence par rappeler quelques définitions.

Spectre ponctuel σ_p :
On rappelle que $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ est dite valeur propre de $S = (S_1, \cdots, S_m)$ s'il existe un vecteur f (non nul) de $\mathcal{H}$ tel que $S_i f = \lambda_i f$ pour tout i dans $\{1, \cdots, m\}$. Notons par $\sigma_p(S)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres de S (*i.e.*, le spectre ponctuel de S). Alors, avec les notations précédentes, nous avons de façon triviale :

$$\sigma_p(S) \subset \sigma_p(N_S) \subset \sigma_p(N). \tag{3.5.18}$$

Bien sûr, on a également les inclusions $\sigma_p(S) \subset \sigma_p(N_{\blacktriangle}) \subset \sigma_p(N)$.

3.5.13 Proposition : *Soit S un multi-opérateur sous-normal tel que $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$ soit dense dans $\mathcal{H}$. Soit N une extension normale de S. Si N_S est l'extension minimale de* *type spectral associée à N, nous avons :*

$$\lambda \in \sigma_p(N_S) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(S^*).$$

Démonstration.
Supposons que $\lambda \notin \sigma_p(S^*)$, on a alors $\cap_{i=1}^m Ker(S_i^* - \lambda_i) = \{0\}$. Soit $g \in \cap_{i=1}^n \mathcal{D}(S_i)$. Si E est la mesure spectrale de N_S et P est la projection orthogonale de $\mathcal{H}[N]$ sur $\mathcal{H}$, bien évidemment, on a :

$$\begin{aligned}(N_{S,i}^* - \lambda_i)E(\{\overline{\lambda}\}) &= \int_{\mathbb{C}^m} (\overline{z_i} - \lambda_i)dE(\overline{z}, z) \int_{\{z=\overline{\lambda}\}} 1dE(\overline{z}, z) \\ &= \int_{\{z=\overline{\lambda}\}} (\overline{z_i} - \lambda_i)dE(\overline{z}, z) = 0.\end{aligned} \tag{3.5.19}$$

Donc, pour tout $f \in \mathcal{H}[N]$ et pour tout $g \in \mathcal{D}(S_i)$ $(i = 1, \cdots, m)$, on obtient :

$$0 = \langle (N_{S,i}^* - \lambda_i)E(\{\overline{\lambda}\})f, g\rangle = \langle PE(\{\overline{\lambda}\})f, (N_{S,i} - \overline{\lambda_i})g\rangle = \langle PE(\{\overline{\lambda}\})f, (S_i - \overline{\lambda_i})g\rangle.$$

Donc la forme $\phi(g) = \langle PE(\{\overline{\lambda}\})f, (S_i - \overline{\lambda_i})g\rangle$ est continue sur $\mathcal{D}(S_i)$, ce qui entraine que $PE(\{\overline{\lambda}\})f \in \mathcal{D}(S_i^*)$ et on a de plus :

$$\langle (S_i^* - \lambda_i)PE(\{\overline{\lambda}\})f, g\rangle = 0.$$

Par densité, on obtient que $(S_i^* - \lambda_i)PE(\{\overline{\lambda}\})f$ est nul. Comme nous avons supposé que $\cap_{i=1}^m Ker(S_i^* - \lambda_i) = \{0\}$, on en déduit que $PE(\{\overline{\lambda}\})f = 0$, pour tout $f \in \mathcal{H}[N]$. En conclusion, la projection $PE(\{\overline{\lambda}\})$ est nulle. Comme P et $E(\{\overline{\lambda}\})$ sont deux projections orthogonales, il en découle que $E(\{\overline{\lambda}\})P = 0$. Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{H}$, on a :

$$f = E(\mathbb{C}^m)f = E(\{\overline{\lambda}\})f + E(\mathbb{C}^m - \{\overline{\lambda}\})f = E(\{\overline{\lambda}\})Pf + E(\mathbb{C}^m - \{\overline{\lambda}\})f,$$

car $\mathcal{H}$ est inclus dans $\mathcal{H}[N]$. On en déduit que :

$$f = E(\mathbb{C}^m - \{\overline{\lambda}\})f, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \tag{3.5.20}$$

en particulier $\mathcal{H} \subset E(\mathbb{C}^m - \{\overline{\lambda}\})\mathcal{H}[N]$. De plus cet espace réduit N_S (c'est le même calcul qu'au (3.5.5)). Par minimalité, on en déduit que $E(\mathbb{C}^m - \{\overline{\lambda}\})\mathcal{H}[N] = \mathcal{H}[N]$. Ceci entraîne que $E(\{\overline{\lambda}\}) = 0$. Si $\overline{\lambda}$ était valeur propre associé au vecteur $f \neq 0$, on aurait, pour tout $i = 1, \cdots, m$, $E_i(\overline{\lambda_i})f = f$ et donc :

$$0 = E(\{\overline{\lambda}\})f = E_1(\{\overline{\lambda_1}\}) \cdots E_m(\{\overline{\lambda_m}\})f = f.$$

Ceci est impossible, ce qui revient à dire que $\overline{\lambda} \notin \sigma_p(N_S)$. ■

Spectre joint d'approximation σ_π :
On dira que $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ est dans le spectre joint d'approximation de S (noté $\sigma_\pi(S)$) s'il existe une suite de vecteurs (f_p) dans $\mathcal{D}(S_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(S_m)$ de normes 1 telle que :

$$||(S_i - \lambda_i)f_p|| \to 0, \quad i = 1, \cdots, m. \tag{3.5.21}$$

Si N est une extension normale de S, on a $||(S_i - \lambda_i)f_p|| = ||(N_i - \lambda_i)f_p||$ pour tout entier $i = 1, \cdots, m$. Donc on a l'inclusion suivante :

$$\sigma_\pi(S) \subset \sigma_\pi(N_S) \subset \sigma_\pi(N). \tag{3.5.22}$$

Spectre joint de compression σ_ρ :
On dira que $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ est dans le spectre joint de compression de S (noté $\sigma_\rho(S)$) s'il existe une suite de vecteurs (f_p) dans $\mathcal{D}(S_1^*) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(S_m^*)$ de normes 1 telle que :

$$||(S_i - \lambda_i)^* f_p|| \to 0, \quad i = 1, \cdots, m. \tag{3.5.23}$$

En fait, nous avons $\sigma_\rho(S)$ qui est le conjugué de $\sigma_\pi(S^*)$. Si N est une extension normale de S, on a :

$$||(N_i - \lambda_i)f_p|| = ||(N_i - \lambda_i)^* f_p||, \tag{3.5.24}$$

pour tout entier $i = 1, \cdots, m$. De plus, l'égalité $S_i^* \supset P_{\mathcal{H}} N_i^*|_{\mathcal{H}}$ implique :

$$||(N_i - \lambda_i)^* f_p|| \geq ||(S_i - \lambda_i)^* f_p||, \forall f_p \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}(N_i^*). \tag{3.5.25}$$

Pour les opérateurs normaux, on a :

$$\sigma_\rho(N_S) = \sigma_\pi(N_S) \text{ et } \sigma_\rho(N) = \sigma_\pi(N). \tag{3.5.26}$$

Spectre joint de Taylor et de Dash :
Notre but est de donner des relations entre un multi-opérateur sous-normal et son extension normale. Or, on sait que tout multi-opérateur sous-normal est permutable (voir [Io-Vas]). Nous utiliserons donc la définition du spectre joint donné dans [Io-Vas] pour de tels opérateurs (définition qui étend la notion de Taylor, voir [Tay]). Nous nous limiterons au cas de deux opérateurs. On commence par quelques rappels. On a la suite :

$$0 \longrightarrow X_s^0 \xrightarrow{\delta_{s,\lambda}^0} X_s^1 \xrightarrow{\delta_{s,\lambda}^1} X_s^2 \longrightarrow 0. \tag{3.5.27}$$

où $X_s^0 = \mathcal{D}(S_1 S_2) \cap \mathcal{D}(S_2 S_1)$, $X_s^1 = \mathcal{D}(S_2) \oplus \mathcal{D}(S_1)$ et $X_s^2 = \mathcal{H}$; et on définit les opérateurs $\delta_{s,\lambda}^0$ et $\delta_{s,\lambda}^1$ par :

$$\delta_{s,\lambda}^0 \left\{ \begin{array}{lll} X_s^0 & \to & X_s^1 \\ x & \mapsto & (S_1 - \lambda_1)x \oplus (S_2 - \lambda_2)x \end{array} \right. \tag{3.5.28}$$

$$\delta_{s,\lambda}^1 \left\{ \begin{array}{lll} X_s^1 & \to & \mathcal{H} \\ x_2 \oplus x_1 & \mapsto & (S_1 - \lambda_1)x_1 - (S_2 - \lambda_2)x_2 \end{array} \right. \tag{3.5.29}$$

On définit alors le spectre de Taylor de S (noté $\sigma_T(S)$) par l'ensemble des couples (λ_1, λ_2) dans la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tels que la suite (3.5.27) ne soit pas exacte (voir les notations dans [Io-Vas], en particulier on pose $S_j - \infty = I$). On dira, dans ce cas, que l'opérateur $(S - \lambda)$ est singulier. On rappelle que $\sigma_T(S)$ est un compact dans $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$. Enfin, on notera par $\sigma_{\mathbb{C}}(S)$ l'ensemble $\sigma_T(S) \cap \mathbb{C}^2$. On definit $\rho(S)$ comme l'ensemble des couples (λ_1, λ_2) tels qu'il existe des éléments B_1 et B_2 bornés vérifiant $B_iS_j \subset S_jB_i$, $B_iB_j = B_jB_i$ et :

$$B_1(S_1 - \lambda_1) + B_2(S_2 - \lambda_2) = I \text{ sur } \mathcal{D}(S_1) \cap \mathcal{D}(S_2). \tag{3.5.30}$$

Alors, le spectre joint de Dash sera l'ensemble $Sp_D(S) = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \rho(S)$ (voir [D], en fait dans le cas borné, on définit le spectre de Dash comme étant les λ vérifiant (3.5.30) où les $(B_i)_i$ sont dans le bi-commutant de S). Nous avons donné la définition de $Sp_D(S)$ dans le cas de bi-opérateurs car plusieurs propriétés seront données pour des couples d'opérateurs. Mais, bien sûr, on peut donner cette même définition dans le cas de m-uplet. Une première remarque est que, dans ce cas, $Sp_D(S) \subset \mathbb{C}^m$. Nous utiliserons une méthode bien connue dans le théorème suivant (voir [Hal2] et [Con] pour le cas borné ainsi que [MDS] et [St-Sz3] pour l'utilisation de cette méthode dans le cas non borné) :

3.5.14 Théorème : *Soit $S|_{\mathcal{D}}$ un multi-opérateur sous-normal tel que $\mathcal{D} \subset \cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$ soit dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par les S_i $(i = 1, \cdots, m)$. Soit N une extension normale de S. Si N_S est l'extension minimale de type spectrale associée à N, nous avons :*

$$Sp_D(N_S) \subset Sp_D(S).$$

Démonstration.
Montrons que $\rho(S) \subset \rho(N_S)$. Il suffit de montrer que si $0 \in \rho(S)$ alors $0 \in \rho(N_S)$. Soit E_{N_S} la mesure spectrale associée à l'opérateur normal N_S. Il existe des opérateurs bornés (vérifiant la condition de commutativité) tels que $\sum_{i=1}^m B_iS_i = I$ sur $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}(S_i)$. Pour tout couple (h, f) dans $\mathcal{K}_{N_S} \times \mathcal{D}$, on a :

(3.5.31)

$$\begin{aligned}
|\langle h, f\rangle| &= |\langle h, (\textstyle\sum_{i=1}^m B_iS_i)^p f\rangle| = |\langle h, \displaystyle\sum_{i_1,\cdots,i_p} B_{i_1}S_{i_1}\cdots B_{i_p}S_{i_p} f\rangle| \\
&= |\sum_{i_1,\cdots,i_p} \langle h, S_{i_1}\cdots S_{i_p}B_{i_1}\cdots B_{i_p} f\rangle| = |\sum_{i_1,\cdots,i_p} \langle N^*_{S,i_p}\cdots N^*_{S,i_1} h, B_{i_1}\cdots B_{i_p} f\rangle| \\
&\leq \sum_{k_1+\cdots+k_m=p} \frac{p!}{k_1!\cdots k_m!} ||N^*_{S,i_p}\cdots N^*_{S,i_1} h||.||B_1||^{k_1}\cdots||B_m||^{k_m}||f||.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_i > 0$ et soit Δ_ε le polydisque de centre 0 et de multi-rayon $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)$. Si $h \in E_{N_S}(\Delta_\varepsilon)\mathcal{K}_{N_S}$, on a :

$$\begin{aligned}
|\langle h, f\rangle| \;\leq \sum_{k_1+\cdots+k_m=p} \frac{p!}{k_1!\cdots k_m!} \Big[\int |z_1^{2k_1}\cdots z_m^{2k_m}| d\langle E_{N_S}(\lambda)h, h\rangle\Big]^{1/2} \\
||B_1||^{k_1}\cdots||B_m||^{k_m}||f||.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$(3.5.32)\qquad \begin{aligned} |\langle h,f\rangle| &\leq \sum_{k_1+\cdots+k_m=p} \frac{p!}{k_1!\cdots k_m!}\varepsilon_1^{k_1}\cdots\varepsilon_m^{k_m}||B_1||^{k_1}\cdots||B_m||^{k_m}||f|| \quad ||h|| \\ &\leq ||f||(\varepsilon_1||B_1||+\cdots+\varepsilon_m||B_m||)^p \quad ||h||. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)$ tel que $\varepsilon_1||B_1||+\cdots+\varepsilon_m||B_m||<1$ et on obtient par passage à la limite sur p que $\langle h,f\rangle=0$ pour tout h dans $E_{N_S}(\Delta_\varepsilon)\mathcal{K}_{N_S}$. Donc, par densité, on a l'inclusion $\mathcal{H}\subset E_{N_S}(\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon)\mathcal{K}_{N_S}$. De plus, il est clair que $E_{N_S}(\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon)\mathcal{K}_{N_S}$ réduit E_{N_S}. Par minimalité, nous obtenons que $E_{N_S}(\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon)\mathcal{K}_{N_S}=\mathcal{K}_{N_S}$. Enfin pour prouver que $0\notin Sp_D(N_S)$, il suffit de construire les opérateurs bornés de l'égalité (3.5.30). Dans ces conditions, on pose les opérateurs pour tout $i=1,\cdots,m$:

$$(3.5.33)\qquad C_i=\int_{\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon}\frac{\overline{z_i}}{|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2}dE_{N_S}(\overline{z},z).$$

On vérifie alors que l'on a :

$$(3.5.34)\qquad \sum_{i=1}^m C_iN_{S,i}=\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon}\frac{\overline{z_i}z_i}{|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2}dE_{N_S}(\overline{z},z)=E_{N_S}(\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon),$$

qui est l'identité sur $\mathcal{K}_{N_S}$ et donc sur $\mathcal{H}$. De plus, on vérifie pour tout couple $(i,j)\in\{1,\cdots,m\}^2$:

$$(3.5.35)\qquad C_iN_{S,j}=N_{S,j}C_i=\int_{\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon}\frac{\overline{z_i}z_j}{|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2}dE_{N_S}(\overline{z},z).$$

Enfin pour la continuité des opérateurs $(C_i)_{i=1,\cdots,m}$:

(3.5.36)

$$||C_i||=||\int_{\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon}\frac{\overline{z_i}}{|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2}dE_{N_S}(\overline{z},z)||\leq||\int_{\mathbb{C}^m\backslash\Delta_\varepsilon}\frac{1}{z_i}dE_{N_S}(\overline{z},z)||\leq\frac{1}{\varepsilon_i}.$$

Enfin la commutativité des opérateurs $(C_i)_i$ provient directement des propriétes du calcul fonctionnel. ■

De la suite exacte (3.5.27), on peut donner les adjoints des opérateurs (3.5.28) et (3.5.29) :

$$\delta^{0*}_{s,\lambda}\begin{cases}\mathcal{D}(S_1^*)\oplus\mathcal{D}(S_2^*) & \to \quad \mathcal{H}\\ x_1\oplus x_2 & \mapsto \quad (S_1-\lambda_1)^*x_1+(S_2-\lambda_2)^*x_2\end{cases}$$

et

$$\delta^{1*}_{s,\lambda}\begin{cases}\mathcal{D}(S_1^*)\cap\mathcal{D}(S_2^*) & \to \quad \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\\ x & \mapsto \quad -(S_2-\lambda_2)^*x\oplus(S_1-\lambda_1)^*x\end{cases}$$

Nous appliquons maintenant une méthode due à F.-H. Vasilescu (dans [Vas]) pour le cas des opérateurs bornés pour obtenir le lemme suivant :

3.5.15 Lemme : *Soit (S_1,S_2) un bi-opérateur permutable tel que $(S-\lambda)=(S_1-\lambda_1,S_2-\lambda_2)$ est non singulier sur $\mathcal{H}$. Alors les opérateurs $C=(S_1-\lambda_1)(S_1-\lambda_1)^*+$*

$(S_2-\lambda_2)(S_2-\lambda_2)^*$ *et* $D=(S_1-\lambda_1)^*(S_1-\lambda_1)+(S_2-\lambda_2)^*(S_2-\lambda_2)$ *sont des bijections fermées de* $\mathcal{D}(S_1S_1^*)\cap\mathcal{D}(S_2S_2^*)$ *sur* $\mathcal{H}$ *(respectivement de* $\mathcal{D}(S_1^*S_1)\cap\mathcal{D}(S_2^*S_2)$ *sur* $\mathcal{H}$*).*

Démonstration.
Il suffit de prouver le lemme pour C. Supposons qu'il existe un $x\in\mathcal{D}(S_1S_1^*)\cap\mathcal{D}(S_2S_2^*)$ tel que $Cx=0$. Alors, on obtient :

$$-(S_2-\lambda_2)^*x\oplus(S_1-\lambda_1)^*x\in Ker(\delta^1_{s,\lambda})=Im(\delta^{1*}_{s,\lambda})^\perp.$$

Mais on a également $-(S_2-\lambda_2)^*x\oplus(S_1-\lambda_1)^*x\in Im(\delta^{1*}_{s,\lambda})$. On en déduit que $-(S_2-\lambda_2)^*x\oplus(S_1-\lambda_1)^*x=0$. Donc, on a :

$$(S_2-\lambda_2)^*x=(S_1-\lambda_1)^*x=0. \tag{3.5.37}$$

Ceci implique que $x\in Ker(\delta^{1*}_{s,\lambda})=Im(\delta^1_{s,\lambda})^\perp=\{0\}$, d'où l'injectivité de l'opérateur C. Supposons maintenant que $y\in\mathcal{H}$; comme

$$\delta^1_{s,\lambda}:[\mathcal{D}(S_2)\oplus\mathcal{D}(S_1)]\cap Ker(\delta^1_{s,\lambda})^\perp\to\mathcal{H} \tag{3.5.38}$$

est un isomorphisme puisque la suite (3.5.27) est exacte, il existe $y_2\oplus y_1$ tel que $y=\delta^1_{s,\lambda}(y_2\oplus y_1)$. Comme $y_2\oplus y_1$ est dans $Ker(\delta^1_{s,\lambda})^\perp=Im(\delta^{1*}_{s,\lambda})$, il existe x dans $\mathcal{D}(S_1S_1^*)\cap\mathcal{D}(S_2S_2^*)$ tel que l'on ait :

$$y=(S_1-\lambda_1)(S_1-\lambda_1)^*x+(S_2-\lambda_2)(S_2-\lambda_2)^*x=Cx. \tag{3.5.39}$$

Enfin C est fermé car il admet un inverse borné. ■

3.5.16 Remarque : C et D sont donc deux opérateurs fermés, injectifs et à images fermées ($\mathcal{H}$ tout entier) ; donc C^{-1} et D^{-1} existent en tant qu'opérateurs continus sur $\mathcal{H}$.

3.5.17 Proposition : *Si* (S_1,S_2) *un bi-opérateur permutable tel que* $S_i(\mathcal{D}(S_i))\subset\mathcal{D}(S_i^*)$, $(i=1,2)$ *nous avons l'inclusion suivante :*

$$\sigma_\pi(S)\cup\sigma_\rho(S)\subset\sigma_{\mathbb{C}}(S).$$

Démonstration.
Si $(\lambda_1,\lambda_2)\notin\sigma_{\mathbb{C}}(S)$ est un couple de $\mathbb{C}^2$. La suite (3.5.27) est exacte. Supposons qu'il existe une suite $(x_k)_k$ d'éléments de $\mathcal{D}(S_1)\cap\mathcal{D}(S_2)$ de normes 1 telle que $||(S_i-\lambda_i)x_k||\to 0$ $(i=1,2)$. On sait que D est une bijection de $\mathcal{D}(S_1^*S_1)\cap\mathcal{D}(S_2^*S_2)$ dans $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}||(S_i-\lambda_i)x_k||^2&=\langle(S_i-\lambda_i)x_k,(S_i-\lambda_i)x_k\rangle\\&=\langle(S_i-\lambda_i)^*(S_i-\lambda_i)x_k,x_k\rangle.\end{aligned} \tag{3.5.40}$$

Donc, $||(S_1-\lambda_1)x_k||^2+||(S_2-\lambda_2)x_k||^2=\langle Dx_k,x_k\rangle$. Ceci implique que $\langle Dx_k,x_k\rangle$ tend vers 0. Si on pose $x_k=D^{-1}y_k$, on obtient que $\langle y_k,D^{-1}y_k\rangle$ où D^{-1} est un opérateur borné positif. En notant D' sa racine carrée positive, $||D'y_k||$ tend vers 0 et donc

$x_k = D'(D'y_k)$ tend aussi vers 0 car D' est continue. Ce qui contredit l'hypothèse (car $||x_k|| = 1$) et donc $(\lambda_1, \lambda_2) \notin \sigma_\pi(S)$.

On utilise le même procédé avec C pour montrer que $(\lambda_1, \lambda_2) \notin \sigma_\rho(S)$. ■

Dans la proposition 3.5.17, on fait l'hypothèse que $S_i(\mathcal{D}(S_i)) \subset \mathcal{D}(S_i^*)$ $(i = 1, 2)$, ceci est en particulier vérifié si on prend des opérateurs formellement normaux ayant un domaine invariant.

De la même manière que l'on définit le spectre joint d'approximation de S, on définit $\sigma'_\pi(S)$ s'il existe une suite de vecteurs (f_p) dans $\mathcal{D}(S_1^*S_1) \cap \mathcal{D}(S_2^*S_2)$ de normes 1 telle que :

$$||(S_i - \lambda_i)f_p|| \to 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.5.41}$$

Bien évidemment, nous avons $\sigma'_\pi(S) \subset \sigma_\pi(S)$.

3.5.18 Proposition : *Si (S_1, S_2) un bi-opérateur permutable, nous avons l'inclusion :*

$$\sigma_\pi(S) \subset Sp_D(S).$$

Si de plus le couple (S_1, S_2) est normal, nous avons également :

$$Sp_D(S) \subset \sigma'_\pi(S) \cup \sigma_{\mathbb{C}}(S).$$

Démonstration.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ dans $\sigma_\pi(S)$ et supposons que $\lambda \notin Sp_D(S)$, soit $(x_k)_k$ une suite dans $\mathcal{D}(S_1) \cap \mathcal{D}(S_2)$ telle que chaque vecteur soit de norme 1. Alors, on a :

$$||\sum_{i=1}^{2} B_i(S_i - \lambda_i)x_k|| = ||x_k|| = 1. \tag{3.5.42}$$

Donc, on obtient la contradiction suivante :

$$1 = ||\sum_{i=1}^{2} B_i(S_i - \lambda_i)x_k|| \leq ||B_1||.||(S_1 - \lambda_1)x_k|| + ||B_2||.||(S_2 - \lambda_2)x_k|| \to 0. \tag{3.5.43}$$

Supposons maintenant que le couple (S_1, S_2) soit normal et que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ne soit ni dans $\sigma'_\pi(S)$ ni dans $\sigma_{\mathbb{C}}(S)$ et montrons que, dans ces conditions, λ ne peut être dans $Sp_D(S)$. Si $x \in \mathcal{D}(S_1^*S_1) \cap \mathcal{D}(S_2^*S_2)$ et s'il vérifie l'égalité $\sum_{i=1}^{2}(S_i - \lambda_i)^*(S_i - \lambda_i)x = 0$, cela implique que $||(S_1 - \lambda_1)x||^2 + ||(S_2 - \lambda_2)x||^2 = 0$. Donc, on obtient que $x \in Ker(S_1 - \lambda_1) \cap Ker(S_2 - \lambda_2)$. Ceci implique que $x = 0$, car si ce n'était pas le cas, on pourrait poser comme suite $x_k = x/||x||$ et donc $\lambda \in \sigma'_\pi(S)$ (d'où la contradiction). Donc l'opérateur D est un opérateur injectif, d'inverse borné par le lemme 3.5.15. Ceci entraîne :

(3.5.44)

$$\int \frac{\overline{z_1 - \lambda_1}}{|z_1 - \lambda_1|^2 + |z_2 - \lambda_2|^2} dE(z)(S_1 - \lambda_1) + \int \frac{\overline{z_2 - \lambda_2}}{|z_1 - \lambda_1|^2 + |z_2 - \lambda_2|^2} dE(z)(S_2 - \lambda_2)$$
$$\subset \int 1 dE(z) = I.$$

Les opérateurs ainsi définis sont bornés et commutent clairement avec (S_1, S_2). Pour la continuité des opérateurs, pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \left|\left| \int \frac{\overline{z_i - \lambda_i}}{|z_1 - \lambda_1|^2 + |z_2 - \lambda_2|^2} dE(z) \right|\right| &\leq \left|\left| \int_{A_M} \frac{\overline{z_i - \lambda_i}}{|z_1 - \lambda_1|^2 + |z_2 - \lambda_2|^2} dE(z) \right|\right| \\ &\quad + \left|\left| \int_{B_M} \frac{\overline{z_i - \lambda_i}}{|z_1 - \lambda_1|^2 + |z_2 - \lambda_2|^2} dE(z) \right|\right|, \end{aligned}$$

où les ensembles A_M et B_M sont respectivement $\{|z_1 - \lambda_1|^2 + |z_2 - \lambda_2|^2 \leq M\}$ et $\{|z_1 - \lambda_1|^2 + |z_2 - \lambda_2|^2 \geq M\}$. Par conséquent, on obtient :

$$\left|\left| \int \frac{\overline{z_i - \lambda_i}}{|z_1 - \lambda_1|^2 + |z_2 - \lambda_2|^2} dE(z) \right|\right| \leq \sqrt{M} ||C^{-1}|| + M', \tag{3.5.45}$$

où M' est une constante provenant du fait que la fonction est bornée sur l'ensemble d'intégration de la seconde intégrale (C^{-1} existe en tant qu'opérateur continu d'après le lemme 3.5.15).
Enfin, la commutativité de ces deux opérateurs bornés est une conséquence directe des propriétés du calcul fonctionnel. ■

3.5.19 Théorème : *Soit $N = (N_1, N_2)$ un bi-opérateur normal tel que $\mathcal{D}(N_1) \cap \mathcal{D}(N_2)$ soit invariant par les N_i $(i = 1, 2)$. Alors, on a l'inclusion suivante :*

$$\sigma_{\mathbb{C}}(N) \subset \sigma'_\pi(N).$$

Démonstration.
Supposons que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ne soit pas dans l'ensemble $\sigma'_\pi(N)$ et montrons que la suite (3.5.27) est exacte. Pour tout $x \in \mathcal{D}(N_1 N_2) \cap \mathcal{D}(N_2 N_1)$, on a :

$$\begin{aligned} \delta^1_{N,\lambda} \circ \delta^0_{N,\lambda}(x) &= \delta^1_{N,\lambda}((N_1 - \lambda_1)x \oplus (N_2 - \lambda_2)x) \\ &= (N_1 - \lambda_1)(N_2 - \lambda_2)x - (N_2 - \lambda_2)(N_1 - \lambda_1)x = 0. \end{aligned} \tag{3.5.46}$$

De plus, si $\delta^0_{N,\lambda}$ n'est pas injectif, il existe un x dans $\mathcal{D}(N_1 N_2) \cap \mathcal{D}(N_2 N_1) \backslash \{0\}$ tel que $(N_1 - \lambda_1)x = (N_2 - \lambda_2)x = 0$. Alors, en utilisant la suite normée et constante $(x_k = x/||x||)_k$ qui est dans $\mathcal{D}(N_1) \cap \mathcal{D}(N_2) \subset \mathcal{D}(N_1 N_1^*) \cap \mathcal{D}(N_2 N_2^*)$ par hypothèse d'invariance, on obtient que $\lambda \in \sigma'_\pi(N)$.

Maintenant, comme $\lambda \notin \sigma'_\pi(N)$, il n'existe pas de suite (x_k) de norme 1 telle $||(N_1 - \lambda_1)x_k|| \to 0$ et $||(N_2 - \lambda_2)x_k|| \to 0$. Pour alléger les notations, on prendra $\lambda = 0$. Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}(N_1^* N_1) \cap \mathcal{D}(N_2^* N_2)$ de norme 1,

$$||N_1 x||^2 + ||N_2 x||^2 \geq \varepsilon > 0, \tag{3.5.47}$$

(sinon on pourrait construire une suite qui impliquerait que $\lambda \in \sigma'_\pi(N)$). Donc pour tout $x \in \mathcal{D}(N_1^* N_1) \cap \mathcal{D}(N_2^* N_2)$, on a :

$$||N_1 x||^2 + ||N_2 x||^2 \geq \varepsilon ||x||^2 \geq 0. \tag{3.5.48}$$

Soit $M = N_1^*N_1+N_2^*N_2$, cet opérateur est auto-adjoint, positif et injectif (par (3.5.48)). Pour vérifier qu'il est auto-adjoint, on utilise le fait qu'il s'écrive comme somme de deux opérateurs positifs pour obtenir la représentation :

$$M = \int |z_1|^2 + |z_2|^2 dE(z, \overline{z}),$$

où E est la mesure spectrale du bi-opérateur normal (N_1, N_2). Comme la fonction intégrée est réelle, l'opérateur est bien auto-adjoint. Il admet donc un inverse M^{-1} de $Im(M)$ sur $\mathcal{D}(M)$. Pour tout $y \in Im(M)$, on a :

$$||M^{-1}y|| \leq \frac{1}{\varepsilon}||y||, \tag{3.5.49}$$

cela provient de l'égalité suivante :

$$||M^{-1}y|| \; ||y|| \geq \langle M^{-1}y, y\rangle = ||N_1M^{-1}y||^2 + ||N_2M^{-1}y||^2 \geq \varepsilon||M^{-1}y||^2.$$

Donc, l'opérateur M^{-1} est continu sur $Im(M)$, ceci implique que $Im(M)$ est fermé : en effet, si $y_k \in Im(M)$ converge vers y, on écrit $y_k = Mx_k$ avec $x_k \in \mathcal{D}(M)$. on a $x_k = M^{-1}y_k \to M^{-1}y$ (on note M^{-1} et son extension par continuité à l'adhérence de $Im(M)$). Donc les couples du graphe (x_k, y_k) convergent vers $(M^{-1}y, y)$ qui est dans le graphe de M car l'opérateur est fermé (auto-adjoint). En particulier, on a bien $y \in Im(M)$.
Soit maintenant $x \in Ker(M^*) = Ker(M)$,

$$0 = \langle N_1^*N_1 + N_2^*N_2x, x\rangle = ||N_1x||^2 + ||N_2x||^2. \tag{3.5.50}$$

Donc on a $N_1x = N_2x = 0$. On en conclut que $x = 0$ (en effet si $x \neq 0$, avec une suite $(x_k = x/||x||)_k$, on aurait $0 \in \sigma'_\pi(N)$; ce qui contredit l'hypothèse faite). Mais alors, on obtient :

$$\{0\} = Ker(M^*) = (Im(M))^\perp. \tag{3.5.51}$$

Donc $Im(M)$ est fermé et dense dans $\mathcal{H}$. Dans ces conditions, pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe un élément x dans $\mathcal{D}(N_1^*N_1) \cap \mathcal{D}(N_2^*N_2)$, tel que :

$$f = Mx = N_1^*N_1x + N_2^*N_2x = N_1(N_1^*x) - N_2(-N_2^*x). \tag{3.5.52}$$

En conclusion, $f \in Im(\delta^1_{N,0})$. Et par conséquent $Im(\delta^1_{N,0}) = \mathcal{H}$. On en conclut que $0 \notin \sigma_{\mathbb{C}}(N)$, ce qui achève la preuve. ∎

3.5.20 Corollaire : *Soit $N = (N_1, N_2)$ un bi-opérateur normal tel que $\mathcal{D}(N_1)\cap\mathcal{D}(N_2)$ soit invariant par les N_i $(i = 1, 2)$. Alors, on a les égalités suivantes :*

$$\sigma'_\pi(N) = \sigma_\pi(N) = Sp_D(N) = \sigma_{\mathbb{C}}(N).$$

Démonstration.
Il suffit d'utiliser toutes les inclusions démontrées précédemment. ∎

Ce corollaire est une extension du théorème 2 de M. Cho et M. Takaguchi (voir [C-T], voir également [S-Z]) où l'on montre dans le cas de multi-opérateurs normaux bornés que le spectre joint de Dash et le spectre joint de Taylor sont les mêmes. Nous utilisons des méthodes différentes puisqu'ici nous traitons le cas non-borné. En particulier si N est une extension normale de S, on a les relations suivantes :

$$\sigma_{\mathbb{C}}(N_S) = \sigma'_\pi(N_S) = \sigma_\pi(N_S) = Sp_D(N_S) \subset Sp_D(S). \tag{3.5.53}$$

On peut noter que l'égalité entre plusieurs spectres classiques avec le spectre de Taylor pour des multi-opérateurs bornés avait déjà été obtenu par E. Albrecht dans [Al1] et [Al-Fru]. L'égalité entre le spectre de Taylor et le spectre joint d'approximation a également été prouvée dans [Al2] pour une situation plus générale (mais toujours pour des familles d'opérateurs bornés).

Spectre continu et spectre résiduel pour des bi-opérateurs permutables.
Notre but de cette partie est de donner une définition et quelques propriétés du spectre continu et spectre résiduel pour des bi-opérateurs permutables.

3.5.21 Définition : Soit $T = (T_1, T_2)$ un bi-opérateur permutable. Le spectre continu (noté $\sigma_c(T)$) sera l'ensemble des λ tels que $\delta^0_{N,\lambda}$ est injectif et $Im(\delta^1_{N,\lambda})$ est un sous espace propre et dense dans $\mathcal{H}$. Enfin, on définit le spectre résiduel (noté $\sigma_r(T)$) comme étant l'ensemble des λ tels que $\delta^0_{N,\lambda}$ est injectif et $Im(\delta^1_{N,\lambda})$ est un sous-espace non dense dans $\mathcal{H}$. Dans ces conditions, on vérifie que :

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \tag{3.5.54}$$

3.5.22 Remarque : Si on a un seul opérateur N, $Ker(\delta^0_{N,\lambda})$ est non nul si λ est valeur propre de N. Dans ce même cas, $\delta^1_{N,\lambda} = N - \lambda$, donc la définition du spectre continu et du spectre résiduel correspond à la définition bien connue. Notre définition étend donc les définitions classiques des différents spectres au cas des bi-opérateurs permutables.

3.5.23 Lemme : *Soit $T = (T_1, T_2)$ un bi-opérateur tel que chaque composante T_i $(i = 1, 2)$ soit hyponormale (fermée) à domaine dense. Alors on a*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\delta^{1*}_{T^*,\lambda}) \times \mathcal{D}(\delta^{1*}_{T^*,\lambda}) \subset \mathcal{D}(\delta^1_{T^*,\lambda}) \\ \forall x \in \mathcal{D}(\delta^{1*}_{T^*,\lambda}), \quad ||\delta^1_{T^*,\lambda}(x,x)|| \leq ||\delta^{1*}_{T^*,\lambda}(x)||, \end{cases}$$
$$\textit{et} \tag{3.5.55}$$
$$\begin{cases} \mathcal{D}(\delta^0_{T,\lambda}) \times \mathcal{D}(\delta^0_{T,\lambda}) \subset \mathcal{D}(\delta^{0*}_{T,\lambda}) \\ \forall x \in \mathcal{D}(\delta^0_{T,\lambda}), \quad ||\delta^{0*}_{T,\lambda}(x \oplus x)|| \leq ||\delta^0_{T,\lambda}(x)||. \end{cases}$$

Démonstration.
On a :

$$\mathcal{D}(\delta^{1*}_{T^*,\lambda})^2 = \mathcal{D}(T_2^{**}) \oplus \mathcal{D}(T_1^{**}) = \mathcal{D}(T_2) \oplus \mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{D}(T_2^*) \oplus \mathcal{D}(T_1^*) = \mathcal{D}(\delta^1_{T^*,\lambda}). \tag{3.5.56}$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(\delta^{1*}_{T^*,\lambda})$, on a :
(3.5.57)

$$\begin{aligned} ||\delta^{1}_{T^*,\lambda}(x,x)|| &\leq ||(T_1^* - \lambda_1)x - (T_2^* - \lambda_2)x|| \leq ||(T_1 - \overline{\lambda_1})^* x|| + ||(T_2 - \overline{\lambda_2})^* x|| \\ &\leq ||(T_1 - \overline{\lambda_1})x|| + ||(T_2 - \overline{\lambda_2})x|| = ||\delta^{1*}_{T^*,\lambda}(x)||. \end{aligned}$$

On a également :
(3.5.58)

$$\mathcal{D}(\delta^0_{T,\lambda})^2 \subset [\mathcal{D}(T_1T_2) \cap \mathcal{D}(T_2T_1)]^2 \subset \mathcal{D}(T_1) \oplus \mathcal{D}(T_2) \subset \mathcal{D}(T_1^*) \oplus \mathcal{D}(T_2^*) = \mathcal{D}(\delta^{0*}_{T,\lambda}).$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(\delta^0_{T^*,\lambda})$:

$$\begin{aligned} ||\delta^{0*}_{T,\lambda}(x \oplus x)|| &\leq ||(T_1 - \lambda_1)^* x + (T_2 - \lambda_2)^* x|| \\ &\leq ||(T_1 - \lambda_1)^* x|| + ||(T_2 - \lambda_2)^* x|| \\ &\leq ||(T_1 - \lambda_1)x|| + ||(T_2 - \lambda_2)x|| = ||\delta^0_{T,\lambda}(x)||. \end{aligned} \tag{3.5.59}$$

■

3.5.24 Propriété : *Soit $T = (T_1, T_2)$ un bi-opérateur tel que chaque opérateur T_i ($i = 1, 2$) soit hyponormal (et fermé) et tel que $\mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2)$ soit dense dans $\mathcal{H}$ et invariant par chaque T_i. Alors, on a :*

$$\sigma_r(T^*) = \emptyset.$$

Démonstration.
Si on a $\lambda \in \sigma_r(T^*)$, on a $Ker(\delta^{1*}_{T^*,\lambda}) = Im(\delta^1_{T^*,\lambda})^\perp \neq \{0\}$. Soit x un vecteur non nul de $Ker(\delta^{1*}_{T^*,\lambda})$, alors on a $x \in Ker(\delta^0_{T,\overline{\lambda}})$ car :

$$0 = -(T_2^* - \lambda_2)^* x \oplus (T_1^* - \lambda_1)^* x = -(T_2^{**} - \overline{\lambda_2})x \oplus (T_1^{**} - \overline{\lambda_1})x.$$

Grâce au lemme précédent, on obtient que $(x, x) \in Ker(\delta^{0*}_{T,\overline{\lambda}})$. D'où, on obtient l'égalité suivante :

$$(T_1 - \overline{\lambda_1})^* x + (T_2 - \overline{\lambda_2})^* x = 0, \tag{3.5.60}$$

ce qui implique également :

$$(T_1^* - \lambda_1)x + (T_2^* - \lambda_2)x = 0. \tag{3.5.61}$$

Mais si $x \in Ker(\delta^{1*}_{T^*,\lambda})$, par le lemme précédent on a $(x, x) \in Ker(\delta^1_{T^*,\lambda})$, et donc on obtient :

$$(T_1^* - \lambda_1)x - (T_2^* - \lambda_2)x = 0. \tag{3.5.62}$$

Grâce aux égalités (3.5.61) et (3.5.62), on obtient que $(T_1^* - \lambda_1)x = (T_2^* - \lambda_2)x = 0$. Ceci entraine que $\lambda \in \sigma_p(T^*)$, ce qui est impossible puisque nous avions supposé que $\lambda \in \sigma_r(T^*)$; et donc on a bien que :

$$\sigma_r(T^*) = \emptyset. \tag{3.5.63}$$

■

3.5.25 Remarques

(1) Ceci est valable, en particulier, pour tout opérateur normal (pour leurs adjoints s'ils commutent entre eux) et pour tout opérateur sous-normal commutatif.

(2) On obtient un résultat de [St-Sz3] sur le spectre résiduel dans le cas d'un seul opérateur.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Abr] ABRAHAMSE M.B., Commuting subnormal operators, *Illinois J. of Math.*, **22** n.1 (1978), 171-176.

[Ak] AKHIEZER N.I., *« The classical Moment problem and Some Related Questions in Analysis ».* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.

[Ak-Gl] AKHIEZER N.I. et GLAZMAN I.M., « Theory of linear operators in HILBERT space » Vol 1, Pitman Adv. Publ. Prog., Boston/London/ Melbourne, 1981.

[Ak-Kr] AKHIEZER N.I. et KREIN M., « Some questions in theory of Moments » Vol 2, Translations of Math. Monographs A.M.S. (1962).

[Al1] ALBRECHT E., Funktionalkalküle in mehreren Veränderlichen, Dissertation, Mainz 1972.

[Al2] ALBRECHT E., Spectral decompositions for systems of commuting operators, *Proc. Royal Irish Acad.*, **81 A** (1981), 81-98.

[Al-Fru] ALBRECHT E. et FRUNZĂ Ş., Non-analytic functional calculi in several variables, *Manunscripta math.*, **18** (1976), 327-336.

[At] ATHAVALE A., On joint hyponormality of operators, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, **103** n.2 (1988), 417-423.

[At-Ped] ATHAVALE A. et PEDERSEN S., Moment problems and subnormality, *J. of Math. Analysis and Applications*, **146** (1990), 434-441.

[Atz] ATZMON A., A moment problem for positive measures on the unit disc, *Pacific J. Math.*, **59** (2) (1975), 317-325.

[Be] BERG C., Moment problems and polynomial approximation, preprint (1997).

[BCJ] BERG C., CHRISTENSEN J.P.R. et JENSEN C.U., A Remark on the Multidimensional Moment Problem, *Math. Ann.*, **243** (1979), 163-169.

[BCR] BERG C., CHRISTENSEN J.P.R. et RESSEL P., *« Harmonic analysis on semigroups ».* Springer-Verlag, New-York/Berlin/Heidelberg/Tokyo, 1984.

[Be-Ma] BERG C. et MASERICK P.H., Polynomially Positive Definite Sequences, *Math. Ann.,* **259** (1982), 487-495.

[BoCoRo] BOCHNAK J., COSTE M. et ROY M.M., *« Géométrie algébrique ré elle ».* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New-York/London/Tokyo, 1987.

[Br] BRAM J., Subnormal operators *Duke Math. J.*, **22** (1955), 75-94.

[Cas] Cassier G., Le problème des moments pour un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér I*, **296** (1983), 195-197.

[Cas2] Cassier G., Problème des moments sur un compact de $\mathbb{R}^n$, *J. of Functional Analysis*, **58** (1984), 254-266.

[Cod] Coddington E.A., Normal extensions of formally normal operators, *Pac. J. Math.*, **10** n :2 (1960), 1203-1209.

[Con] Conway J.B., « The Theory of Subnormal Operators », Math. Surveys and Monograpghs Vol 36, A.M.S. Providence, Rhode Island 1991.

[C-T] Cho M. et Takaguchi M., Identity of Taylor's joint spectrum and Dash's joint, Studia Math. **T : LXX**, (1982), 225-229.

[D] Dash A.T., Joint Spectra, Studia Math. **T : XLV**, (1973), 225-237.

[De] Demanze O., Moments and positivity, *J. Math. Anal. Appl.,* **247** (2000), 570-587.

[De2] Demanze O., Remarque sur le K-problème des moments, *C. R. Acad. Sci.*, **t.331**, série I, 453-457 (2000).

[De3] Demanze O., Polynomial Representation via Spectral Decompositions, *à paraître dans Positivity,* (2002).

[De4] Demanze O., A Subnormality Criterion for Unbounded Tuples of Operators, *à paraître dans Acta Sci. Math. (Szeged),* (2002).

[De5] Demanze O., On Subnormality and formal subnormality for tuples of unbounded operators, *à paraître dans Integral Equations and Operator Theory,* (2002).

[Du-Schw] Dunford N. et Schwartz J.T., « Linear operators, part II », Interscience Publishers, New-York/London/Sydney, 1963.

[Emb] Embry M.R., A generalization of the Halmos-Bram criterion for subnormality, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **35** (1973), 61-64.

[Es-Vas] Eschmeier J. et Vasilescu F.-H., On jointly essentially self-adjoint tuples of operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **67** (2001), 373-386.

[Fa] Fan P., A Note on hyponormal weighted shifts, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **92** (1984), 271-272.

[Fr] Friedrich J., A Note on the Two-Dimensional Moment Problem, *Math. Nachr.*, **121** (1985), 285-286.

[Fr2] Friedrich J., Operator Moment Problem, *Math. Nachr.*, **151** (1991), 273-293.

[Fu] Fuglede B., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **36** (1950), 35-40.

[Fu2] Fuglede B., *The multidimensional moment problem.* Expositiones Mathematicae, **1** (1983), 47-65.

[Ge-Na] Gelfand I.M. et Naimark M.A., On the imbedding of a normed ring into the ring of operators in a Hilbert space (Russian) *Matem. Sb.,* **12** (54) (1943), 197-213.

[Gi-Se] GIRARDIN V. et SEGHIER A., Construction d'extensions de suites définies positives. Cas multidimensionnel. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I,**313** (1991), 71-74.

[Gór] GÓRNIAK J., Remarks on positive definite operator valued functions in linear spaces, *Probability theory on vector spaces,* Springer Lect. Notes in Math., **656** (1978), 37-44.

[Hal] HALMOS P.R., Normal dilations and extensions of operators, *Sum. Bras. Math.,* **2** (1950), 125-134.

[Hal2] HALMOS P., Spectra and Spectral manifolds, Ann. Soc. Polon. Math. **25**, (1952), 43-49.

[Hal3] HALMOS P.R., Ten problems in HILBERT space, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **5** (1970), 887-933.

[Io-Vas] IONAŞCU E.J. et VASILESCU F.-H., Joint spectral properties for permutable linear transformations, *J. Reine Angew Math.*, **426** (1992), 23-45.

[It] ITÔ T., On commutative family of subnormal operator's, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, **14** (1958), 1-15.

[Ja] JACOBSON N., « Lectures in Abstract Algebra III », Theory of fields and Galois theory, Van Nostrand, Toronto/New-York/London, 1975.

[JTN] JONES W. B., THRON W. J. et NJASTAD O., Orthogonal Laurent Polynomials and the Strong HAMBURGER Moment Problem, *J. Math. Ann. Appl.*, **98** (1984), 528-554.

[JTW] JONES W. B., THRON W. J. et WAADELAND H., A strong STIELTJES moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, (1980), 503-528.

[Koo] KOOSIS P., The logarithmic integral I, *Cambridge University Press*, Cambridge (1988).

[Lam] LAMBERT A., Subnormality and weighted shifts, *J. of the London Math. Soc.*, **14** (1976), 476-480.

[Lub] LUBIN A., Weighted shifts and products of subnormal operators, *Indiana Univ. Math. J.*, **26** (1977), 839-845.

[Lub2] LUBIN A., Semigroup without normal extension, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **68** (1978), 176-178.

[Lub3] LUBIN A., Weighted shifts and commuting normal extensions, *J. Austr. Math. Soc. Ser. A,* **27** (1979), 17-26.

[MDS] MCDONALD G. et SUNDBERG C., On the spectra of unbounded subnormal operators, Can. J. Math. **38**, (1986), 1135-1148.

[Nel] NELSON E., Analytic vectors, *Annals of Math.*, **70** (1959), 572-615.

[Ot] ÔTA S., On normal extensions of unbounded operators, *Bull. of Polish Acad. of Sci. Math.*, **46**, n.3 (1998), 291-301.

[Ot-Sch] Ôta S. et Schmüdgen K., On some classes of unbounded operators, *Int. Eq. Op. Th.*, **12**, (1989), 211-226.

[Pet] Petersen L.C., On the relation between the multidimensional moment problem and the one-dimensional moment problem, *Math. Scand.*, **51** (1982), 361-366.

[Po] Powers R.T., Selfadjoint algebras of unbounded operators II, *Trans of the A.M.S.*, **187** (1974), 261-293.

[Pu] Putinar M., Sur la complexification du problème des moments, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I,**314** (1992), 743-745.

[Pu2] Putinar M., Positive polynomials on compact semi-algebraic sets, *Indiana Univ. Math. J.*, **42** (1993), 969-984.

[Pu-Vas] Putinar M. et Vasilescu F.-H., Problèmes des moments sur les compacts semi-algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I,**323** (1996), 787-791.

[Pu-Vas2] Putinar M. et Vasilescu F.-H., Solving moment problems by dimensional extension, *Annals of Mathematics*, **149** (1999), 1087-1107.

[Pu-Vas3] Putinar M. et Vasilescu F.-H., A uniqueness criterion in the multivariate moment problem, *à paraître dans Math. Scand.*, (2002).

[Put] Putnam C.R., On normal operators in Hilbert space, *Amer. J. of Math.*, **73** (1951), 357-362.

[Ri] Riesz M., Troisième note sur le problème des moments, *Ark. För mat, astr. och fys.*, **17** (1923), n. 16, 1-52.

[Rob] Robinson R.M., Some definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials, *Notices Amer. Math. Soc.*, **16** (1969), 554.

[Ro] Rosenblum M., On a theorem of Fuglede and Putnam, *J. of the London Math. Soc.*, **33** (1958), 376-377.

[Ru] Rudin W., « Analyse fonctionnelle », Traduction de la 2*ieme* édition, Ediscience international, Paris (1995)

[Sch] Schmüdgen K., An example of a positive polynomial which is not a sum of square of polynomials. A positive, but not strongly positive functional, *Math. Nachr.*, **88** (1979), 385-390.

[Sch2] Schmüdgen K., The K-moment problem for semi-algebraic sets, *Math. Ann.*, **289** (1991), 203-205.

[Sha] Shafarevich I.R., « Basic algebraic geometry. 1 », Springer-Verlag, Berlin,1994.

[S-T] Shohat A. et Tamarkin J.D., « The problem of moments » Math. Surveys **1**, American Mathematical Society (Providence, 1943).

[Si] Simon B., The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator, *Advances in Math.*, **137** (1998), 82-203.

[Sli] Slinker S.P., On Commuting Self-Adjoint Extensions of Unbounded Operators, *Indiana Univ. Math. J.*, **27** n.4 (1978), 629-636.

[Slo] SLOCIŃSKI M., Normal extensions of commutative subnormal operators, *Studia Math.*, **T. LIV** (1976), 259-266.

[Sta] STAMPFLI J., Which weighted shifts are subnormal? , *Pacific J. Math.*, **17** (1966), 367-379.

[St-Sz] STOCHEL J. et SZAFRANIEC F.H., On normal extensions of unbounded operators I, *J. Operator Theory*, **14** (1985), 31-55.

[St-Sz2] STOCHEL J. et SZAFRANIEC F.H., On normal extensions of unbounded operators II, *Acta Sci. Math.*, **53** (1989), 153-177.

[St-Sz3] STOCHEL J. et SZAFRANIEC F.H., On normal extensions of unbounded operators III, Spectral Theory, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **25** (1989), 105-139.

[St-Sz4] STOCHEL J. et SZAFRANIEC F.H., Unbounded Weighted Shifts and subnormality, *Int. Eq. Op. Theory*, **12** (1989), 146-153.

[St-Sz5] STOCHEL J. et SZAFRANIEC F.H., The complex moment problem and subnormality : A polar decomposition approach, *J. of Func. Anal.*, **159** (1998), 432-491.

[S-Z] SLODKOWSKI Z. et ZELASKO W., On joint spectra of commuting families of operators, Studia Math. **T : L**, (1974), 127-148.

[Tay] TAYLOR J.L., A joint spectrum for Several commuting operators, J. of Funct. Anal. **6** (1970), 172-191.

[Vas] VASILESCU F.-H., On pairs of commuting operators, Studia Math. **T : LXII**, (1978), 203-207.

[Vas2] VASILESCU F.-H., Moment Problems for Multi-sequences of Operators, *J. of Math. Analisys and Applications*, **219** , (1998), 246-259.

[Vas3] VASILESCU F.-H., HAMBURGER and STIELTJES moment problem in several variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *(à paraître)*.

[Vas4] VASILESCU F.-H., Operator moment problems in unbounded sets, Operator Theory : Advances and Applications, Vol **127** , (2001), 613-638.

[Vas5] VASILESCU F.-H., Extension of unbounded symmetric multioperators, *Préprint*, (2001).

Problème des moments multi-dimensionnel et sous-normalité jointe.

Résumé : On s'intéresse au problème multi-dimensionnel des moments sur des ensembles compacts arbitraires ou juste fermés (non bornés) par le biais de méthodes d'extensions d'opérateurs symétriques. Les résultats obtenus permettent, en autres, de donner des représentations de polynômes positifs sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. On donne également des réponses aux versions opératorielles de ces problèmes des moments. Celles-ci permettent d'obtenir plusieurs critères de sous-normalité jointe (en particulier pour des multi-opérateurs non bornés à domaine dense invariant) et d'hyponormalité. Ces critères sont alors appliqués à certains opérateurs particuliers comme les multi-shifts à poids unilatéraux et bilatéraux. Enfin, on donne deux notions différentes de minimalité d'extension normale ainsi que des relations spectrales entre ces extensions et le multi-opérateur sous-normal.

Multi-dimensional moment problem and joint subnormality.

Abstract : We are interested in multi-dimensional moment problem on arbitrary compact sets and unbounded sets via extension methods of symmetric operators. The results allow us, for example, to obtain representations of polynomials which are non-negative on subsets of $\mathbb{R}^n$. Moreover, we give solutions of the so-called operator moment problems. These solutions allow us to give several criterions of joint subnormality (particularily for unbounded multi-operators) and joint hyponormality. These criterions are applied to certain classes of operators, as for example unbounded weighted unilateral and bilateral multi-shifts. At last, we give two notions of minimality of normal extension for unbounded subnormal multi-operators and some spectral relations between these kinds of extensions and the subnormal multi-operator.

Mots clés : Moment problem ; unbounded multi-operator ; subnormality ; hyponormality ; weighted shifts ; polynomial representations ; functionnal calculus ; joint spectrum.

Classification A.M.S. : 44A60 ; 47A13 ; 47B20 ; 47B25 ; 47A57 ; 47B37 ; 26Cxx.